엠제곱(M^2)

수학 올림피아드 셈본

중학생 고급

한국과학기술원 수학문제연구회

머 릿 말

KAIST 수학문제연구회는 한국 수학올림피아드가 처음 탄생할 무렵인 1988년부터 지금까지 다양한 영재교육 프로그램을 운영하거나 적극적으로 기여해왔습니다. 한국 수학올림피아드 통신강좌와 계절학교 등의 교육프로그램, 대전.충남 지역 중학생 영재수학교실, KAIST 사이버원격교육 등이 그 예들입니다.

이런 활동의 결과들을 그동안은 수학 잡지 MATHLETTER를 통해 주로 담아내어 왔는데, 이 잡지는 대학생들의 학술잡지 성격이 더 짙기 때문에 수학경시 준비를 위한 교재를 따로 만들어 달라는 요청이 꾸준히 있었습니다. 그 요청에 부응하여 이번에 약 3년간의 작업으로 처음 수학경시 문제집을 출판하게 되었습니다.

이 교재는 중학 교과과정의 학습을 거의 끝내고 수학올림피아드와 각종 수학경시대회를 처음 준비하는 학생들을 위해 쓰여졌습니다. 그래서 학생들에게 익숙한 일반적인 수학 문제집의 형식을 취하고 있습니다. 각 절마다 먼저 학습할 개념을 익히고, 기본문제와 유제에서 기본적인 유형의 문제들을 풀어본 후, 응용된 연습문제를 풀도록 되어있습니다. 늘 머리속에 담아두고 생각할 도전거리를 찾는 학생들을 위해 각 절의 끝에 매우 어려운 도전문제도 종종 남겨두었습니다.

초급과 중급, 고급의 3단계로 나누어져 있는 것은 기본적으로는 학습수준의 향상을 의미합니다. 초급은 보통의 교과문제집보다 아주 조금 어려운 정도일 뿐이라 상위권 학생들은 무난히 공부할 수 있습니다. 중급은 그보다 심화되고, 고급에 이르면 한국 수학올림피아드 중등부 수준에 거의 근접하게 됩니다.

하지만, 이 3단계의 구분은 단순히 문제 난이도의 심화만을 뜻하는 것이 아니라 학습할 개념의 심화도 포함합니다. 각 단계의 교재는 실제로 같은 내용을 중복해서 다루지 않고 각각 다른 내용과 개념을 학습하게 합니다. 매우 뛰어난 학생의 경우 초급 교재 정도는 보지 않고 넘어가도 상관없겠지만, 중급 교재마저 뛰어넘는 것은 권장하지 않습니다. 이 3단계 수준 구성에 대한 보다 적극적인 구분은 다음과 같습니다.

- 중학생 초급 교재의 목표는 중학 교과 과정을 종합적으로 소화하고, 끈기있

는 실험과 계산으로 기초적인 문제해결력을 키우는 것에 중점을 두었습니다. 이 단계에서는 아직 증명 논리를 익히거나 문제에 이론적으로 접근하는 것은 요구되지 않고, 약간의 아이디어를 활용하며 답을 내기까지의 풀이를 만드는 연습이 주로 이루어집니다.

- 중학생 중급 교재의 목표는 우선 증명과 수학적 언어의 사용에 익숙해지는 것에 주목합니다. 또한 수학적 아이디어가 필요한 다양한 응용을 체험하고 알고리즘적인 문제해결과 분석력을 키우는 것에 중점을 두었습니다. 학생은 이제 수학문제를 보며 스스로 실험과 관찰을 통해 문제해결의 방향을 잡아나가고 그것을 증명도 하게 됩니다.
- 중학생 고급 교재의 목표는 실전적인 경시수준의 다양한 문제들을 해결할 수 있는 능력을 키우고, 자신이 알아낸 바를 이론적 증명으로 잘 풀어낼 수 있도록 훈련하는 데에 중점을 두었습니다. 이 단계를 겪고 나면 수학 올림피아드가 어떤 것인지 학생 스스로 눈이 뜨일 것입니다. 모든 준비가 끝났으니 마음껏 도전을 즐기도록 하세요.

연습문제들은 때로 절반 정도 밖에 풀지 못할 때도 있을 것입니다. 그렇다고 전진을 멈추지 말고 다음 절의 학습으로 진행해 나아가고, 풀지 못했던 문제는 나중에 돌아와서 다시 풀어보세요. 끈기있게 도전하여 힘든 여정을 넘어가면서 자신의 능력에 차차 자신감을 갖게 될 것입니다.

2003년 8월, 책임편집자 고 봉 균

차례

제 1 장

논리와 절차

1.1 비둘기집의 원리

주영이는 친구들 4명과 함께 중국집으로 식사를 하러 갔습니다. 중국집의 차림표를 살펴보니 메뉴에는 4가지 종류의 음식이 있었습니다. 주영이와 친구들은 무엇이든지 서로 똑같은 것을 몹시 싫어하여 서로 다른 음식을 시키지 않으면 먹으려 하지 않았습니다.

> "이걸 내가 먹으면 넌 다른걸 시켜야 하니깐.. 흠.."
>
> "어라? 그건 나랑 겹치잖아!"
>
> "흠, 다른 것들도 다 시켜버렸는데?"

주영이는 웃음을 지으며 이렇게 말했습니다.

> "후훗.. 어떻게 하든 최소한 2명은 서로 같은 음식을 먹을 수 밖에 없는 상황이야."
>
> "어? 왜 그렇게 되는데?"
>
> "응, 비둘기 집의 원리라는 아주 간단한 수학이론을 쓰면 모든 게 풀려."

주영이가 말하는 비둘기 집의 원리라는건 대체 어떤 것일까요?

비둘기집의 원리를 **디리클레(Dirichlet)의 상자 원리**, 혹은 **서랍 원리**라고도 합니다. 비둘기집의 원리는 매우 간단한 하나의 정리에서 시작한답니다.

비둘기집의 정리

비둘기가 비둘기집보다 더 많을 때, 이들 비둘기가 비둘기집에 모두 들어갔다면 2마리 이상의 비둘기가 같이 있는 비둘기집이 적어도 하나 있다.
좀더 구체적으로 얘기하면: $(n+1)$마리 이상의 비둘기가 n개의 비둘기집에 들어갔다면 적어도 한 집에는 2마리 이상의 비둘기가 있다.

머리속으로 위의 상황을 그려보기만 해도 당연하다는 것을 알게되는 쉬운 정리입니다. 이것이 옳다는 것은 수학적으로 어떻게 증명할까요?

증명 모든 집에 비둘기가 1마리 이하로 있다고 가정을 하면 비둘기의 수는 비둘기집의 수인 n보다 작거나 같아야 한다. 이것은 비둘기의 수가 $(n+1)$이라는 위 가정에 모순이다. 그러므로 가정이 틀렸고, 적어도 한 집에는 2마리 이상의 비둘기가 있게 된다. □

위처럼 결론을 부정하는 내용의 가정을 세우고 논리를 전개를 했을 때 모순이 생김을 보이는 식의 증명 방법을 앞서 배웠던 **귀류법**이라고 합니다.

예제 1

세 개의 자연수가 있다. 그럼 어느 두 수의 차는 짝수가 됨을 보여라.

증명1 (직접 증명)
자연수는 짝수와 홀수로 분류된다. 순서를 무시할 때, 세 개의 수는 각각

$$(\text{짝},\text{짝},\text{짝}),\quad (\text{짝},\text{짝},\text{홀}),\quad (\text{짝},\text{홀},\text{홀}),\quad (\text{홀},\text{홀},\text{홀})$$

등으로 되는 것이 가능한 모든 경우들이다. (짝,짝,짝)이나 (짝,짝,홀)의 경우에는 두 개의 짝수를 빼면 그 차가 짝수가 되고, (짝,홀,홀)이나 (홀,홀,홀)의 경우에는 두 개의 홀수를 빼면 그 차가 역시 짝수가 된다. □

증명2 (귀류법에 의한 간접 증명)
결론을 부정하여, 어느 두 수의 차도 항상 홀수가 된다고 가정하자. 각각 짝수인 두 수가 있다면 그 두 수의 차가 짝수가 되므로 이것은 곤란하고, 따라서 짝수는 많아야 하나 있다. 홀수인 두 수가 있어도 마찬가지로 그 차가 짝수가 되므로, 홀수도 많아야 하나 있다. 자연수는 짝수이거나 홀수이고, 각각 많아야 하나 있으므로, 원래의 수는 많아야 둘 있다. 그런데 세 개의 자연수가 있다고 했으므로 이것은 모순이 되고, 따라서 두 수의 차가 항상 홀수가 된다는 가정이 틀렸다. 결국 두 수의 차가 짝수가 되는 경우가 반드시 있음이 증명되었다.
□

증명3 (비둘기집 원리에 의한 증명)

자연수는 짝수와 홀수(2개의 비둘기집)로 분류할 수 있다. 세 개의 자연수(3마리의 비둘기)가 있으므로, 비둘기집의 원리에 의해 각각 짝수이거나 각각 홀수인 두 수가 있다. 이 두 수의 차는 짝수가 된다. □

어떤 증명이 가장 좋아보이나요? 역시 미리 귀류법을 사용해 증명해둔 비둘기집의 원리를 사용하니까 증명이 많이 깔끔해지는군요.

비둘기집의 원리를 다음과 같이 관점을 뒤집어 생각할 수도 있습니다. 비둘기와 비둘기집의 역할이 서로 바뀌었습니다. 증명은 똑같을테니 생략합니다.

비둘기집의 원리 (뒤집은 관점)

비둘기보다 비둘기집이 더 많을 때, 이들 비둘기가 모두 비둘기집에 들어갔다면 빈 비둘기집이 적어도 하나 있다.
즉, 비둘기가 n마리 있고, 비둘기집이 $(n+1)$개 이상 있다면 비둘기가 살지 않는 집이 반드시 있다.

예제 2

어린 아기를 돌보던 주영이는 심심함을 느끼고는, 아기가 가지고 놀던 숫자 카드를 빼들었다. 1부터 20까지 쓰여진 카드를 뒤집어놓고 11장의 카드를 골라 뒤집었다. 이 때, 뒤집어진 카드들 중 최소한 한 장은 짝수 카드임을 보여라.

증명 1부터 20까지의 숫자에는 10개의 홀수(비둘기)

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19$$

가 있다. 이 보다 더 많은 11장의 카드를 뒤집었으므로 (관점을 뒤집은) 비둘기집의 원리에 의해, 홀수가 아닌 카드가 반드시 있다. 홀수가 아니면 짝수이므로, 바로 이 카드는 짝수이다. □

이런 저런 변형과 논리적인 효율 같은 것을 얘기하긴 했지만, 그래도 비둘기집의 원리는 너무 쉽죠? 이런 것을 왜 굳이 이런 강의에 포함시켜 가르칠까 하는 의문도 들 거라고 생각합니다. 하지만, 너무 속단하지는 마십시오. 비둘기집의 원리는 처음 상상하는 것보다 매우 다양한 응용을 가지고 있고, 어려운 문제에서 매우 강력한 증명법으로 적용되는 경우가 많습니다. 특히 무엇을 비둘기로 하고 무엇을 비둘기집으로 할 것인지를 찾는 것이 대단히 중요합니다.

비둘기집의 응용으로, 보다 확장된 형태의 비둘기 집의 원리를 알아볼까요?

확장된 비둘기집의 원리 1

비둘기가 비둘기집의 수의 k배보다 더 많으면, $k+1$마리 이상의 비둘기가 함께 사는 비둘기집이 적어도 하나 있다.
즉, 비둘기가 $kn+1$마리 이상 있고, 비둘기집이 n개 있으면, $k+1$마리의 비둘기가 한 집에 있는 경우가 반드시 있다.

이것은 보다 일반적으로는 또 다음의 확장된 원리의 특수한 경우에 해당하므로 증명은 연습문제로 미뤄두겠습니다. 귀류법으로 증명할 수도 있고, 다음의 원리로부터 $q_1 = q_1 = \cdots = q_n = k$ 로 두어 증명할 수도 있습니다.

확장된 비둘기집의 원리 2

음이 아닌 정수 $q_1, q_2, \ldots, q_n$ 에 대하여 $(q_1 + q_2 + \cdots + q_n) + 1$ 마리 이상의 비둘기가 1부터 n번까지 번호가 매겨진 n개의 집에 나뉘어져 들어갔다면 적어도 하나의 i $(1 \leq i \leq n)$ 에 대하여, 번호 i가 매겨진 집에 $(q_i + 1)$마리 이상의 비둘기가 있다.

증명 역시 귀류법으로 증명한다.
만약 모든 i $(1 \leq i \leq n)$ 에 대하여 i번째 집에 q_i마리 이하의 비둘기가 들어 있다면, 전체 비둘기의 수는 $(q_1 + q_2 + \cdots + q_n)$ 마리 이하가 되어 모순이다. 따라서, i번째 집에 $q_i + 1$마리 이상의 비둘기가 있는 경우가 반드시 있다. □

이건 좀 복잡한가요? 이해가 될 때까지 잘 되새겨보고 확실히 이해한 다음 넘어가기 바랍니다.

그럼, 이 두 정리가 적용되는 보기를 살펴볼까요?

예제 3

준연이네 가족들은 대구로 소풍을 가게 되었다. 소풍에는 준연이네 가족 말고도 준연이 아버지의 친구분들 가족도 참석을 하여 인원이 총 14명이 되었다. 해가 질 무렵에 대구역에 도착하여 빨리 목적지까지 가기 위해 택시를 타고 이동하기로 결정을 했다. 총 3대의 택시를 이용한다면 그 중 적어도 한 대에는 5명 이상이 타야함을 보여라.

증명1 3대의 택시 각각에 4명 이하가 탄다면 모두 $3 \times 4 = 12$ 명 이하만 탈 수 있다. 14명이 타는 것이므로 이는 모순이다. 따라서, 5명 이상이 타는 택시가 있다. □

증명2 비둘기집의 원리로 바로 증명을 한다면, 14명 $(> 4 \times 3)$ 의 사람이 3대에 나누어 타야 하므로 비둘기집의 원리에 의해 적어도 한 대에는 5명 $(= 4+1)$ 이상이 타게 된다. □

예제 4

67명의 사람이 있으면 적어도 하나의 i $(i = 1, \ldots, 12)$ 에 대해 i월에 태어난 사람이 i명 이상 있음을 보여라.

증명1 i월에 태어난 사람이 i명보다 항상 적다고 하자. 그럼

1월에 태어난 사람은	한 명도 없어야 하고,
2월에 태어난 사람은	1명 이하,
3월에 태어난 사람은	2명 이하,
⋮	⋮
12월에 태어난 사람은	11명 이하가 되어야 한다.

그래서 총 인원이 $0+1+2+\cdots+11=66$ 명 이하이다. 67명의 사람이 있으므로 이것은 모순이고, 따라서 문제의 명제가 성립한다. □

증명2 $67=(0+1+2+\cdots+11)+1$ 이므로

$$q_1=0,\ q_2=1,\ \ldots,\ q_{12}=11 \qquad (q_i=i-1)$$

이라 하고 위의 확장된 비둘기집의 정리 2를 적용하면 된다. 그럼 i월에 $q_i+1(=i)$ 명 이상이 태어난 경우가 반드시 있다. □

다음과 같은 것도 비둘기집의 원리의 하나라고 볼 수 있습니다.

평균과 비교하는 비둘기집의 원리

n개의 음이 아닌 정수 $m_1, m_2, \ldots, m_n$의 평균

$$\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n}{n}$$

이 r보다 크면(크거나 같으면/작으면/작거나 같으면), 이들 m_i 중 적어도 하나는 r보다 크다(크거나 같다/작다/작거나 같다).

증명 귀류법에 의해 만약 모든 i에 대해 $m_i \le r$이면,

$$\frac{m_1+m_2+\cdots+m_n}{n} \le \frac{\overbrace{r+r+\cdots+r}^{n\text{번}}}{n} = \frac{nr}{n} \le r$$

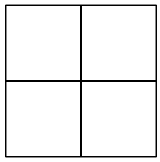
이 되어 모순이다. □

비둘기집은 기하학적으로 응용되어 나타나는 경우가 많은데, 다음의 보기도 그 중 하나입니다.

보기 5

한 변의 길이가 2인 정사각형의 내부에 5개의 점이 있다. 그럼 어느 두 점의 거리는 기껏해야 $\sqrt{2}$ 이하임을 증명하여라.

증명 정사각형을 다음과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형들로 4등분하면 비둘기집이 잘 보인다.

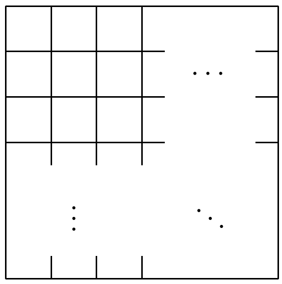


5개의 점이 있으므로 비둘기집의 원리에 의해 이렇게 나뉜 작은 사각형 중 2개 이상의 점이 포함되는 곳이 있다. 그럼 그 두 점 사이의 거리는 기껏해야 이 작은 정사각형의 대각선의 길이 $\sqrt{2}$를 넘지 못한다. □

기본문제 1.1.1

한 변의 길이가 10인 정사각형의 내부에 101개의 점이 있다. 이 중 최소한 한 쌍은 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이하임을 보여라.

증명 정사각형을 다음과 같이 가로 세로를 10등분하여 100개의 구역으로 나누자.



101개의 점이므로 비둘기 집의 원리에 의해 최소한 2개의 점은 같은 구역에 들어가야 한다. 이 두 점 사이의 거리는 한 변의 길이가 1인 이 작은 정사각형의 대각선의 길이 $\sqrt{2}$를 넘지 못한다. 따라서, 최소한 한 쌍은 두 점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$ 이하가 된다. □

유제 한 변의 길이가 3인 정육각형의 내부에 55개의 점이 있다. 그럼 이 중에 어느 두 점 사이의 거리는 1 이하가 됨을 증명하여라.

기본문제 1.1.2

1부터 $2n$까지의 정수 중 $(n+1)$개의 수를 임의로 골라내면 그 중 최소한 한 쌍은 서로 소임을 보여라.

(관찰) 연속한 두 정수는 언제나 서로 소이다. 다른 서로 소인 관계의 두 수를 고민할 필요없이 여기에만 주목해보자. 그럼 골라낸 수 중에 연속한 두 정수가 있으면 바로 그 쌍이 서로 소인 두 수가 되겠다. 1에서 $2n$까지의 정수 중에서 연속한 두 수가 없도록 하면서 가장 많은 수를 골라내려면, 예를 들어 다음과 같이

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$$

하나씩 건너뛰면서 뽑는 것이 최선일 것이다. 이렇게는 많아야 n개까지만 뽑을 수 있을 것이다.

(증명) 1부터 $2n$까지의 $2n$개의 정수들을 다음과 같이 둘씩 n개의 조로 나누자.

$$(1,2),\ (3,4),\ (5,6),\quad \ldots,\quad (2n-1,2n)$$

$n+1$개의 수를 고르면, 비둘기집의 원리에 의해 같은 조에서 뽑은 두 수가 있다. 그럼 그 두 수는 연속한 정수이고, 따라서 서로 소인 두 수가 된다. □

(주) 실제로

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots,\ 2n$$

의 n개의 수를 뽑으면 모두 2의 배수이므로 서로 소인 쌍을 여기서 골라낼 수 없다. 즉, $n+1$이 서로 소인 쌍이 항상 생긴다는 것을 보장하는 임계값이다.

(주) 이런 문제를 학생들에게 증명하라고 하면, 종종 세련된 논리를 펼치지 못하고 특수한 경우만으로 모든 것을 설명하려고 드는 경우가 많다. 예를 들어 위의 주에서 본 임계점의 예를 이용하여

> $2,4,6,\ldots,2n$ 처럼 n개의 수를 서로 소인 것이 없도록 뽑을 수 있다.
> 여기서 하나를 더 뽑는다면 그것은 홀수이고, 따라서 먼저 뽑은 짝수

> 들 중에서 이웃한 수가 반드시 있다. 그럼 그 두 수는 서로 소이므로, 항상 서로 소인 두 수가 있다.

와 같이 말하는 경우를 볼 수 있다. $n+1$개의 수를 뽑는데 꼭 n개의 짝수들과 하나의 홀수를 뽑아야 한다는 법이 어디 있는가? 물론 이렇게 하지 않으면 아마 n개의 수를 뽑기도 전에 미리 항상 서로 소인 두 수가 생겨버릴지도 모른다. 그러나, 그것은 도대체 누가 증명했단 말인가?
이런 것이 제대로된 일반적인 증명이 될 수 없다는 것을 잘 음미하기 바란다.

유제 어떤 농구팀에 12명의 선수가 있다. 코치가 선수들에게 0번부터 20번까지 번호가 적혀 있는 유니폼을 나누어 주었다. 물론 똑같은 번호를 가지고 있는 선수는 존재하지 않는다. 이 때, 연속하는 번호를 가지는 두 선수가 반드시 존재함을 보여라.

기본문제 1.1.3

석호가 생일파티에 초대한 n명(석호를 포함하여)의 석호의 친구들이 거실에 있다. 파티에 온 사람들은 서로 모두 알고 지내는 사이는 아니라고 한다. 이 때 이 파티에 참석한 사람들 중, 자신이 아는 사람들의 숫자가 같은 두 사람이 반드시 존재함을 증명하라. (단, A가 B를 안다고 항상 B도 A를 아는 것은 아니다.)

증명 이 파티에 온 n명의 사람들은, 다른 참석자 중에 자신이 아는 사람이 한 명도 없는 경우(0)부터 시작해서 모두 아는 경우($n-1$. 자기 자신은 셈에서 제외해야 하므로)까지 총 n가지의 경우가 가능하다. 그런데, 석호의 생일파티에 초대된 친구들이므로 적어도 석호는 누구나가 알아야 한다. 즉 아는 사람의 수가 0인 경우는 없다. 그렇다면, 아는 사람의 수는

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1$$

로 총 $(n-1)$가지가 되고, 사람의 수는 n명이므로, 비둘기집의 원리에 의해 적어도 두 사람은 아는 사람들의 숫자가 같게 된다. □

유제 n명의 사람들이 한 방에 모였다. 인사를 나누는 시간에 그들은 서로 악수를 하거나 하지 않았다고 한다. 이들 중 악수를 나눈 사람들의 숫자가 같은 두 사람이 반드시 존재함을 보여라.

기본문제 1.1.4

n개의 자연수들 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 이 있다. 이들은 모두 n의 배수가 아니라고 한다. 이들 중 둘 이상의 수를 합하여 항상 n의 배수를 만들 수 있음을 증명하여라.

관찰 $n-1$개의 수만으로는 n의 배수가 만들어지지 않는 경우가 있다. 예를 들어 $n-1$개의 수가 모두 1이라면 그 중에서 몇 개를 합하는 것으로는 2에서 $n-1$까지의 수밖에는 못 만든다. 하지만, 하나의 수가 더 있다면? 여러 경우를 많이 실험해보면 문제의 명제가 맞을 것이라는 느낌이 들 것이다. 그런데, 증명의 아이디어는 어떻게 찾을 수 있을까?
합을 얻는 방법이 $2^n - (n+1)$ 가지나 있지만, 그 중에 n의 배수가 있음을 바로 보이기는 어려워 보인다. 그럼 그 중에 n으로 나눈 나머지가 서로 같은 두 경우가 있다면 어떨까? 둘을 빼면 n의 배수가 나올 것이다. 하지만, 이 경우에는 한 쪽이 다른 쪽에 완전히 포함되는 경우가 아니면, 둘을 뺀 결과에는 $(a_1 + a_3) - (a_2 + a_3) = a_1 - a_2$ 와 같이 어떤 수(a_1)는 합해져 있겠지만 어떤 수(a_2)는 빼어져 있을 것이다. 어, 그런데 한 쪽이 다른 쪽에 완전히 포함되는 경우라면? 그래, 바로 이것이 아이디어이다!

증명 다음과 같은 n개의 합을 생각하자.

$$a_1, \quad a_1 + a_2, \quad a_1 + a_2 + a_3, \quad \dots, \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

만일 이 중에 n의 배수가 있다면 그것으로 증명은 끝난다. a_1은 문제에서 n의 배수가 아니라고 하였으므로, 두 수 이상의 합들인 나머지 합 중에 n의 배수가 있을 것이기 때문이다.
그럼 이 중에 n의 배수가 없을 경우만 살펴보자. 그리고, 이들을 n으로 나눈 나머지를 생각하자. n의 배수가 없는 경우이므로, n으로 나눈 나머지는 0은 될 수 없고, 따라서

$$1, \ 2, \ \dots, \ n-1$$

의 $n-1$ 종류가 있을 수 있다. 따라서 비둘기집의 원리에 의해, 처음의 n개의 합 중에는 반드시 나머지가 같은 것이 있다. 그럼 두 합의 차는

(1) n의 배수이고,

그 둘을 각각 $a_1 + \cdots + a_i$ 와 $a_1 + \cdots + a_j$ $(i < j)$ 라 하면 둘의 차는

$$(a_1 + \cdots + a_j) - (a_1 + \cdots + a_i) = \quad a_{i+1} + \cdots + a_j$$

이므로 역시

(2) $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 중 (연속된) 몇 항의 합으로 이루어져 있다.

따라서, 원하는 n의 배수가 되는 합을 찾았다.
만일 이것이 단 하나의 항으로 이루어질지도 모르므로 두 항 이상의 합을 원한다는 조건과 맞지 않는다는 의문을 제기한다면, 그것은 쓸데없는 걱정임을 말할 수 있다. 문제에서 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 각각이 모두 n의 배수가 아니라고 하였으므로 단 하나의 항이 n의 배수로 나오는 경우는 있을 수 없고, 따라서 사실상 '두 항 이상'의 합이라는 조건은 별로 의미가 없는 것이었다. □

유제 n개의 실수 $r_1, r_2, \ldots, r_n$ 이 있다. 이들 중 하나 이상의 수를 합하여 어떤 정수와의 차가 $\frac{1}{n}$ 이하가 되도록 할 수 있음을 보여라.

기본문제 1.1.5

두꺼운 흰 종이에서 작은 원반과 흰 원반을 오려낸다. 두 원반을 각각 8개의 합동인 부채꼴들로 나누고, 그 중 각각 4개씩의 부채꼴에 검정칠을 한다. 이제 두 원반의 중심을 일치시키고, 작은 원반이 위쪽에 놓이도록 포개놓는다. 그럼 안쪽 원반을 적당히 회전시켜서, 적어도 4개의 안쪽 원반의 부채꼴이 같은 색을 가진 바깥쪽 원반의 부채꼴들과 포개어지도록 할 수 있음을 증명하여라.

증명 작은 원반을 1/8 회전씩 8번 돌리는 동안, 큰 원반의 각 부채꼴은 정확히 4번씩 작은 원반의 부채꼴과 같은 색끼리 포개어진다. 따라서, 그동안 포개어지는 모든 경우의 수는

$$8 \times 4 = 32$$

번이다. 그럼 비둘기집의 원리에 의해, 이 8번의 회전 동안 같은 색의 부채꼴 4쌍 이상이 동시에 포개어지는 때가 반드시 있어야 한다.
(항상 3쌍 이하만 포개어진다면 모두 $8 \times 3 = 24$번 이하의 포갬만이 있다는 것이고, 이것은 바로 위의 32번이라는 것에 모순이 된다.) □

유제 (1989년 KMO) 원탁에 10명의 손님자리가 명찰과 함께 놓여있다. 10명의 손님이 명찰을 확인하지 않고 아무렇게나 앉았더니 제자리에 앉은 손님이 한 사람도 없었다. 이 때, 명찰이 놓인 원탁을 적당히 회전시키면 적어도 2명의 손님이 제자리에 앉게 됨을 증명하여라.

연습문제 1.1.1

다음의 확장된 비둘기집의 원리 1을 증명하여라:
비둘기가 $kn+1$마리 이상 있고, 비둘기집이 n개 있으면, $k+1$마리의 비둘기가 한 집에 있는 경우가 반드시 있다.

연습문제 1.1.2

(1) 100명의 사람이 있다면 그 중 15명 이상은 같은 요일에 태어났음을 보여라.
(2) 100명의 사람이 있다면 그 중 4명은 같은 날짜에 태어났음을 보여라.
(3) 100명의 사람이 있다면 그 중 9명 이상은 같은 달에 태어났음을 보여라.

연습문제 1.1.3

한 변의 길이가 4인 정사각형의 내부에 33개의 점이 있다. 단, 어느 세 점도 일직선 위에 있지 않다. 그럼 이 중에 어느 세 점으로 이루어진 삼각형의 넓이는 1/2 이하가 됨을 증명하여라.

연습문제 1.1.4

의진이가 아파서 병원에 갔더니 의사가 운동부족이라는 진단을 내렸다. 의사는 의진이에게 일주일에 최소한 141회의 팔굽혀펴기 운동을 하라고 시켰다. 의진이는 2월 1일부터 일주일간 팔굽혀펴기를 했다. 이 때 적어도 하루는 그 날의 일수의 5배보다 더 많은 수의 팔굽혀펴기를 했다는 것을 증명하여라.

연습문제 1.1.5 (1906년 헝가리 Eötvös 경시대회, 1988년 KMO) n은 홀수이고, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 은 1에서 n까지의 서로 다른 자연수들을 재배열한 것이다. 이 때,

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$$

이 짝수임을 증명하여라.

연습문제 1.1.6 (1925년 헝가리 Eötvös 경시대회) 임의의 4개의 정수 a, b, c, d에 대하여, 두 수의 차를 모두 곱한

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

가 항상 12의 배수가 됨을 증명하여라.

연습문제 1.1.7 17명의 학생들이 일렬로 되어 있는 20개의 의자에 앉아 있다면, 반드시 어떤 5명은 연속하여 앉아 있음을 증명하여라.

연습문제 1.1.8 한 변의 길이가 2인 정삼각형 내부에 점 5개를 찍었을 때, 두 점 사이의 거리가 1 이하가 되는 경우가 반드시 있음을 보여라.

연습문제 1.1.9 (1988년 KMO) 한 변의 길이가 4인 정삼각형의 내부에 9개의 점을 찍으면 이 중 어느 3점은 넓이가 2 미만인 삼각형의 꼭지점이 됨을 보여라. 단, 어느 세 점도 한 직선 위에 있지는 않다.

연습문제 1.1.10 좌표평면에서 x, y의 좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 한다. 서로 다른 임의의 5개의 격자점이 있으면, 어느 두 격자점을 이은 선분 위(양끝점은 제외)에는 격자점이 있음을 증명하여라.

연습문제 1.1.11 $1, 4, 7, \ldots, 100$ 의 숫자들 중에서 임의로 20개를 골라 A라는 집합의 원소로 취했다고 하자. 이 때 집합 A 안에는 합이 104인 두 개의 수가 반드시 존재함을 보여라.

연습문제 1.1.12 임의의 52개의 정수를 택했을 때, 그 중에는 합 또는 차가 100으로 나누어떨어지는 두 수를 항상 찾을 수 있음을 증명하여라.

도전문제 1.1.1

방학을 맞아 의진이는 한 가지 재미있는 실험을 하게 되었다. 그것은 대전 시내에 나가서 아무 사람이나 무작위로 6명을 골랐을 때, 이 6명 중 적어도 3명이 서로 다 알거나, 서로 다 모르는 경우가 있을 확률을 구해보기로 하였다. 그런데, 의진이의 친구인 장수가 실험을 할 필요없이 당연히 확률은 1 이라고 하였다. 이 말은 사실일까? 아니면 장수가 실수를 한 것일까? 단, A가 B를 알면 B도 A를 아는 것으로 한다.

주 위의 문제는 비둘기집의 원리를 이용해 확장된 것으로 유명한 램지(Ramsey) 이론의 출발점이 되는 것이다.

도전문제 1.1.2

위 문제가 맞다는 가정 하에서, 6명 중에 서로 다 알거나 서로 다 모르는 3명을 찾을 수 있는 방법이 사실은 항상 적어도 2가지씩 있음을 보여라. 그리고, 3가지를 찾는 것은 불가능할 수 있음을 보여라.

도전문제 1.1.3

어떤 운동선수가 매일 한 번 이상 연습하고 일주일에 12번 이하만 연습하여 12주(84일)간 계속한다고 한다. 이 선수가 연속적으로 몇 일간 연습한 횟수를 더하면 그 합이 꼭 23회가 되는 경우가 있음을 밝혀라.

1.2 재귀와 점화식

위대한 수학자인 가우스(Carl Friedrich Gauss)가 어렸을 때 있었던 유명한 이야기가 하나 있습니다. 여러분은 이미 이 이야기를 알고있는 사람이 많겠죠?

가우스가 초등학교를 다닐 시절에 선생님이 학생들에게 1부터 100까지의 합을 구하라고 했습니다. 다른 학생들이 열심히 덧셈을 하고 있는데 가우스는 이미 계산을 다 끝내버렸습니다. 가우스가 했던 방법은 1과 100의 합이 101이고 그 다음의 쌍인 2와 99의 합도 101, 이런 식으로 50과 51의 합까지 해서 모두 50개의 101이 있다고 생각을 한 것이지요.

$$(1 + 100) + (2 + 99) + \cdots + (50 + 51) = 50 \times 101$$

실제로 가우스가 어렸을 때 저런 방법을 생각해서 했었는지에 대한 것은 중요한 것이 아니랍니다. 이 이야기에서 중요한 것은 저런 규칙성을 발견한다는 것이지요. 수학에서 문제를 푸는 아이디어는 매우 중요합니다. 복잡한 계산을 단순하게 만들어주기도 하고, 풀리지 않는 문제들을 풀 수 있도록 만들기도 하지요.

특히 이번에 배울 재귀함수에서는 저런 규칙성을 찾는 것이 매우 중요합니다. 이 이야기에서 나온 수열의 양 끝의 합을 살펴보는 것도 이런 규칙성을 찾는 데에 도움이 되는 하나의 아이디어라는 것이지요.

여기서 배울 재귀라는 말에는 같은 부분이 계속 반복된다는 의미가 포함되어 있답니다. 규칙성을 찾는다는 것을 염두에 두고 계속 공부해나아가 볼까요? 다음 이야기를 잘 보세요.

■ 재귀 수열

옛날 옛적에 석운이와 지영이가 산에 있는 절을 가고 있었습니다. 산길을 거쳐서 절에 올라가는 오르막길에 계단이 있었습니다. 지영이와 석운이의 보폭으로는 한 번에 한 계단 아니면 두 계단을 오를 수 있었습니다.

수학을 좋아하는 석운이에게 문득 물음이 생겼습니다.

물음 1

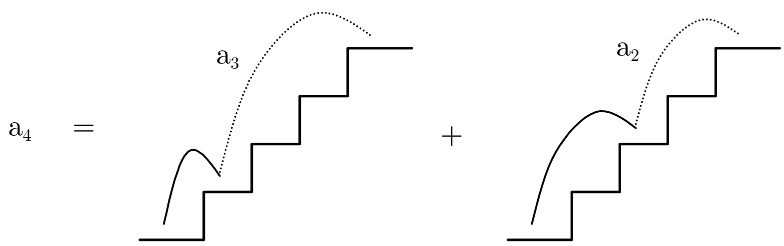
"한 번에 한 계단 아니면 두 계단을 오를 수 있으면, 여기 계단을 끝까지 오르는 방법은 몇 가지나 될까?"

질문을 받은 지영이가 열심히 생각한 끝에 다음과 같이 석운이에게 답을 제시했습니다.

"음, 석운아, n개를 오르는 방법의 수를 a_n이라고 할게. 그럼 a_1은 한 계단만을 오르는 것이니까 한 가지, 즉 $a_1 = 1$ 이 될 것이고, a_2는 두 계단을 한꺼번에 오르는 방법과 한 계단씩 두 번 밟아 오르는 방법이 있으니까 2가 되겠지? a_3은 잘 세어보니까 아마 3인 것 같아. a_4쯤 되면 경우를 다 따져주는 게 복잡해 보이니까 이렇게 한번 생각해보자. 4개의 계단을 오를 때 처음 발디딤이 한 계단 짜리인 경우와 두 계단 짜리인 경우로 구분할 수 있잖아? 처음 발디딤이 한 계단이면 남은 계단의 수는 3이니까 여기서부터 남은 계단을 모두 오르는 방법은 $a_3 = 3$ 가지가 될 거야. 그리고, 처음 발디딤이 두 계단이면 남은 계단의 수가 2이니까 또 이것도 그때부터 오르는 방법의 수는 $a_2 = 2$ 가지가 되겠지. 맞지? 그러니까, 계단이 4개일 때 오르는 방법은

$$a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$$

와 같이 셈이 되겠어."



석운이가 "아하!" 하고 무릎을 쳤습니다.

"야아, 그래 알겠어. 계단이 5개일 때도 처음에 한 계단을 오르느냐 두

계단을 오르느냐에 따라 a_5를 a_4와 a_3으로 나눠서 셀 수 있겠구나. 즉,

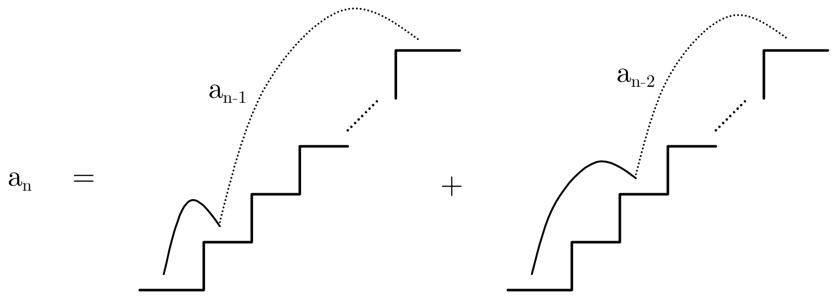
$$a_5 = a_4 + a_3 = 5 + 3 = 8$$

이야."

"맞아, 일반적으로 n개의 계단을 오르는 방법은 첫 발디딤을 한 계단 짜리로 하느냐 두 계단 짜리로 하느냐로 나뉘어지고, 남은 계단이 각각 $(n-1)$계단과 $(n-2)$계단이니까

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

와 같은 합으로 얻어지는 거야. a_{n-1}과 a_{n-2}를 알고 있으면 a_n도 알게 되는 거지. 그러니까 음 ... 처음의 a_1이랑 a_2랑 둘만 알면 나머지는 차근차근 더해서 다 구할 수 있다는 게 되고 말이야."



이 이야기에 등장한 수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 은 1과 2로 시작하고 두 항씩 더해지는 수열이니까,

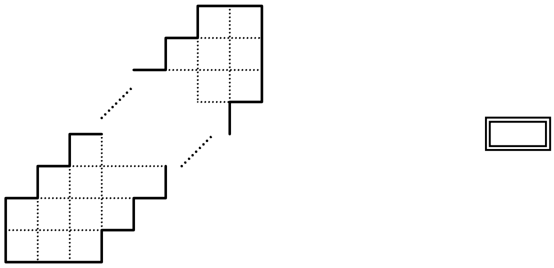
$$1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \cdots$$

와 같이 계속 쓸 수 있습니다. 이 수열은 **피보나치 수열**이라는 매우 유명한 수열로, 황금비와도 깊은 관련이 있답니다.

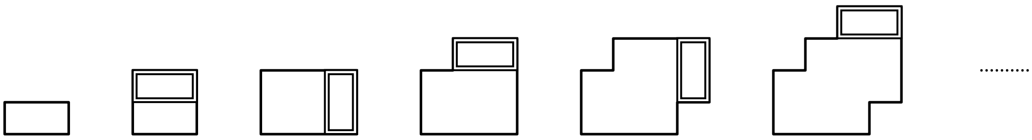
여기서는 이런 특정한 수열에 관심을 두는 것이 아니고, 앞서 알아낸 결과들을 이용해 그 다음의 결과를 계산해낼 수 있는 관계, 즉 **재귀**(recurrence)에 대해 알아보려고 합니다.

■ 넓이 $2n$의 지그재그판에 도미노 깔기

다음 그림과 같은 넓이 $2n$인 지그재그판에 2×1 도미노를 가득 까는 방법의 수 z_n을 생각해봅시다.

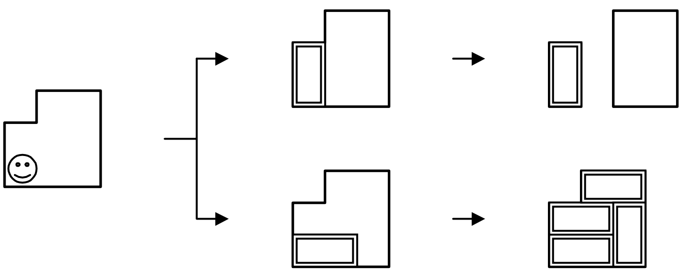


이 판은 다음과 같이 도미노 크기의 작은 판에서 위로 혹은 오른쪽으로 도미노 크기만큼씩 더 넓히면서 만들어진 것으로 생각하면 됩니다.



z_1은 도미노 판에 도미노를 까는 것이므로 1이고, z_2는 2×2판에 도미노 둘을 모두 가로로 눕히거나 둘 다 세로로 세우는 방법뿐이므로 2가 된다는 것을 쉽게 구할 수 있습니다. $z_3 = 3$인데, 다음과 같은 경우들이 있습니다.

그럼 z_4, z_5 등은 어떻게 그 경우의 수를 다 셀 수 있을까요? z_4는 다음과 같은 모양이고, 그 가장 왼쪽 하단의 칸에 주목합시다. 이 칸을 도미노가 덮어야 하는데, 가로로 덮느냐 세로로 덮느냐에 따라 두 가지로 분류할 수 있습니다.



세로로 덮는다면 판의 남아있는 부분이 정확히 넓이 $2 \cdot 3$인 지그재그판(의 가로와 세로를 뒤바꾼 것)이 되므로, 남은 판을 도미노로 모두 덮는 방법은 정확히 z_3가지가 됩니다. 그리고, 저 첫칸을 가로로 덮었을 때는 그 바로 윗칸에 도미노가 가로로

들어갈 수 밖에 없고, 그럼 그 오른쪽에는 세로로 들어갈 수 밖에 없으며, ... 이런 식으로 계속하여 남은 판을 덮는 방법은 정확히 한 가지로 결정됩니다. 따라서, 두 경우를 합해주면 모든 방법의 수는 다음과 같이 나옵니다.

$$z_4 = z_3 + 1 = 3 + 1 = 4$$

z_5에서도, ... 일반적으로 z_n에서도 마찬가지가 됩니다. 첫칸을 세로로 깔았을 때는 남은 판이 정확히 넓이 $2 \cdot (n-1)$인 지그재그판이 되어 남은 판을 도미노로 모두 덮는 방법은 정확히 z_{n-1}가지이고, 첫 칸을 가로로 깔았을 때는 남은 판을 덮는 방법이 한 가지로 결정됩니다. 따라서,

$$z_1 = 1, \qquad z_n = z_{n-1} + 1$$

의 점화식으로 z_n이 구해지며, 이것은 사실은 n이 1 커질 때마다 z_n도 1 커지므로 $z_n = n$ 으로 정리되는 식이 됩니다.

이렇게, 경우의 수를 구하는 어떤 문제들은 그보다 작은 비슷한 형태를 다시 찾아줌으로써 재귀적인 과정으로 잘 풀릴 때가 종종 있습니다.

기본문제 1.2.1

칠판에 2와 3이라는 수가 쓰여져 있다. 그리고 이 칠판에 새로운 수를 추가로 쓰는데, 단 이미 a와 b의 수($a = b$ 라도 상관없음)가 쓰여져 있을 때 $ab + a + b$ 의 수를 쓰는 것을 규칙으로 한다. 다음 중 칠판에 쓰여질 수 없는 수를 모두 골라라.

(1) 109 (2) 143 (3) 191 (4) 257 (5) 323

관찰 $ab + a + b$ 의 규칙으로 작은 수들을 차근차근 모두 만들어 볼 수 있다.

$$2,\ 3,\ 11,\ 35,\ 47,\ 107,\ \ldots$$

물론 이 방법으로도 그리 시간이 오래 걸리지는 않을 것이다. 하지만 실수하기도 무척 쉽겠고, 만일 문제를 좀더 큰 수에서 낸다면 곤란해질 것이다. 혹시 더 좋은 다른 방법이 없을까?

풀이 새로 쓰여지는 수를 c라 하면 $c = ab + a + b$ 인데, 양변에 1을 더해주면 $c+1 = (a+1)(b+1)$ 이다. 즉, 칠판에 쓰여지는 수들에 모두 1을 더해서 생각하면 $c' = a'b'$ 의 좋은 규칙이 됨을 알 수 있다. 처음 쓰여진 수가 (1을 더해서 생각했을 때) 3, 4이므로, 앞으로 쓰여지는 수는 이들의 곱으로 이루어지는 수, 즉 3^m4^n꼴의 수(에서 1을 뺀 수)들이다. 보기의 수들은 1을 더했을 때 각각 110, 144, 192, 258, 324이고, 이 가운데 3^m4^n꼴로 소인수분해되지 않는 것은 110과 258이다. ⋯ **답** (1), (4) ♢

유제 7장의 색종이가 있다. 여기서 몇 장을 골라 각각을 7조각으로 자른다. 그리고, 이렇게 만들어진 여러 조각 중에서 몇 장을 골라 또 각각을 7조각으로 자른다. 이런 과정을 통해서는 어떻게 해도 정확히 2001조각이 되도록 할 수 없음을 증명하여라.

기본문제 1.2.2

연이자가 (복리로) 10%인 은행이 있다. 1만원을 맡긴 후 n년이 지나서 다시 찾아 갈 때 얼마를 받을 수 있는가? 재귀적인 방법, 즉 점화식으로 이것을 계산하는 식을 서술하여라. 단, 연이자가 복리라는 것은 원금에서 붙은 이자에 다시 이자가 붙는 방법이다.

풀이 1만원을 맡긴 후 n년이 지났을 때의 금액을 a_n이라고 하자. a_n은 그 1년 전의 금액 a_{n-1}에 10%의 이자 $0.10a_{n-1}$을 합한 것이 되므로,

$$a_n = a_{n-1} + 0.10a_{n-1} = 1.10a_{n-1}$$

와 같이 계산된다. 따라서,

$$a_0 = 1\text{만원}, \qquad a_n = 1.10a_{n-1}$$

이 구하는 점화식이다. ◇

유제 위의 은행에 정기적금을 맡긴다고 하자. 1월초, 처음에 1만원을 넣었고 그 후로 계속 매년 1월초에 1만원씩 넣기로 하면, 만 10년이 지났을 때 찾을 수 있는 돈은 얼마가 되겠는가? ($1.10^{10} \fallingdotseq 2.6$ 으로 계산해도 좋다)

기본문제 1.2.3

0과 1로만 이루어진 숫자의 나열을 bit string이라고 한다. 예를 들어서, 0110100은 길이가 8인 bit string이다. 길이가 n이고 연속하는 두 개의 0을 가지지 않는 bit string의 개수 a_n에 대해서, 재귀적 관계와 초기조건을 구하여라.

풀이 우선 길이가 n이고 연속하는 두 개의 0을 가지지 않는 bit string의 개수는, 그러한 것 중에서 0으로 끝나는 것의 개수와 1로 끝나는 것의 개수의 합임을 주목하자.
$n \geq 3$이라고 가정하자. (이렇게 가정하는 이유가 무엇인지는 이 풀이를 계속 읽다보면 알 수 있을 것이다.) 길이가 n이고 1로 끝나는 연속하는 두 개의 0을 가지지 않는 bit string은 길이가 $n-1$이고 연속하는 두 개의 0을 가지지 않는 bit string 의 끝에 1을 붙인 것과 같다. 즉, 이러한 것은 a_{n-1}개가 있다.
이제 0으로 끝나고, 길이가 n이고 연속하는 두 개의 0을 가지지 않는 bit string을 생각해 보자. 0은 연속하지 않는다 했으므로, 끝에서 두 번째 자리의 수는 반드시 1이 되어야 함을 알 수 있다. 따라서, 길이가 n이고, 0으로 끝나고, 연속하는 두 개의 0을 가지지 않는 bit string 은 길이가 $n-2$이고 연속하는 두개의 0을 가지지 않는 bit string 의 끝에 1 0을 붙인 것과 같다. 즉, 이러한 것은 a_{n-2}개가 있다.
따라서, $n \geq 3$인 경우에는 다음과 같은 재귀적 관계를 얻는다.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

그리고 $a_1 = 2$, $a_2 = 3$임은 쉽게 알 수 있다. ♢

유제 연속한 3개의 0을 갖지않는 12자리 bit string의 개수를 구하여라.

연습문제 1.2.1

10개의 계단이 있다. 한 번에 한 칸 혹은 두 칸 혹은 세 칸씩 갈 수 있다고 할 때, 이 10개의 계단을 오르는 경우의 수는?

연습문제 1.2.2

연이자가(복리로) 10%인 은행이 있다. 1월 초, 처음에 100만원을 넣었고 그 후로 계속 매년 1월에 1만원씩 빼간다고 하면, 10년이 지나 찾을 수 있는 돈은 얼마가 되겠는가? 단, $1.10^{10} \fallingdotseq 2.6$ 으로 계산해도 좋다.

연습문제 1.2.3

동전을 던져서 앞면이 나오면 1점, 뒷면이 나오면 2점을 받는다. 그래서 받은 점수의 총합이 10점이 되면 이긴 것으로, 10점을 넘으면 진 것으로 하고 동전 던지기를 끝낸다. 이길 확률은 얼마인가?

연습문제 1.2.4

양의 정수 n에 대해 수열 a_n이 다음과 같이 정의되어 있다.

$$a_1 = 1, \qquad a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) \quad (n > 1)$$

이 때, a_{2000}을 구하여라.

연습문제 1.2.5

한 원의 원주 위에 $1, 2, 3, \ldots, n$의 수들을 놓는데, 이웃한 두 수의 차가 항상 2 이하가 되도록 한다. (만일 수들의 배열 순서만을 고려하기로 한다면) 배열의 방법이 유일함을 증명하여라.

연습문제 1.2.6

임의의 양의 정수 n에 대해

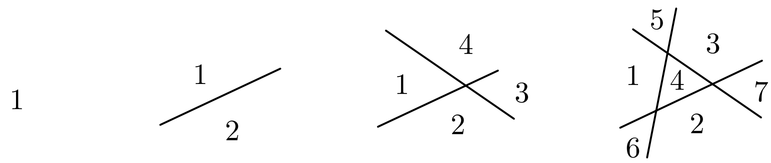
$$h(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

이라 정의하자. 예를 들어, $h(1) = 1$, $h(2) = 1+\frac{1}{2}$, $h(3) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ 이다. $n = 2, 3, 4, \ldots$ 에 대해 다음 식이 성립함을 증명하여라.

$$n + h(1) + h(2) + h(3) + \cdots + h(n-1) = nh(n)$$

연습문제 1.2.7

평면에 n개의 직선을 그릴 때, 이 직선들로 나뉘어지는 영역은 최대 몇 개가 되겠는가? 점화식을 이용해서 풀어라.



연습문제 1.2.8

위 문제에서, 직선들로 나뉜 영역들은 어떤 것들은 무한히 넓고, 또 어떤 것들은 유한한 넓이를 갖는다. 무한히 넓은 것들의 개수와 유한한 것들의 개수를 각각 구하여라.

연습문제 1.2.9

구면이 있다. 이 구면에 10개의 대원(구면의 가장 큰 원)을 그리는데, 어느 세 대원도 한 점에서 만나지 않는다. 그럼 이 10개의 대원이 구면을 최대 몇 개의 영역으로 나누는가?

연습문제 1.2.10

처음 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이지만, 일단 앞면이 나온 상황에서 바로 다음 번에 다시 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 뒷면이 나온 상황에서 바로 다음 번에 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$인 동전이 있다. 이 동전을 10번 던졌을 때 10번 째에 앞면이 나올 확률은?

연습문제 1.2.11

1, 2, 3의 세 숫자를 이용해 10자리 숫자를 만들려고 한다. 1과 2는 인접하여 배열할 수 없다면 (즉, 1의 옆에는 1과 3만이, 2의 옆에는 2와 3만이 올 수 있다.) 10자리 숫자를 몇 개나 만들 수 있을까?

연습문제 1.2.12

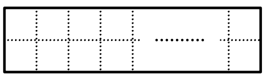
다음 표의 각 열에서 수를 하나씩 뽑는데, 그렇게 뽑은 수들이 모두 다르게 하고 싶다.

	1	2	$\cdots$	$n-2$	$n-1$
1	2	3	$\cdots$	$n-1$	n
2	3	4	$\cdots$	n	

이렇게 뽑는 방법의 수를 b_n이라 할 때, $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$ 이 만족됨을 보여라.

연습문제 1.2.13

$2 \times n$ 크기의 놀이판을 2×1 크기의 도미노들로 가득 채우는 방법의 수가 피보나치 수열로 나옴을 증명하여라.



도전문제 1.2.1

3차원 공간에 n개의 평면을 그릴 때 이 평면들로 나뉘어지는 영역은 최대 몇 개인가?

도전문제 1.2.2

$3 \times 2n$ 크기의 놀이판을 2×1의 도미노 $3n$개로 가득 깔려고 한다. 그 방법의 수는 모두 몇 가지나 되는가?

제 2 장

정수의 성질

2.1 일차 잉여방정식

여러분은 $3x + 5y = 7$ 의 모든 정수해를 구하라는 문제를 풀 수 있을 것입니다. 중급 과정의 부정방정식에 관한 파트에서 **분수식을 이용하는 방법**과 **동차식의 방법** 등을 배웠던 것을 기억하나요?

그런데, 거기서 배우지 못했던 것이 있습니다. 만일 문제가 $119x + 271y = 1$ 의 모든 정수해를 구하라는 정도로 숫자가 복잡해지면 어떨까요? 만일 분수식을 이용하고자 한다면,

$$x = \frac{1 - 271y}{119}$$

로 식을 변형하고, $1 - 271y$ 가 119의 배수가 되는 경우를 찾아주어야 합니다. 그럼 y를 $119k$, $119k + 1$, ..., $119k + 118$ 까지 119가지로 분류하여 각각 대입해보며 맞는 경우를 찾아주어야 하겠군요. 혹시 이 정도 작업은 별것 아니라고 하는 학생이 있다면, 그럼 $3974x + 2771y = 1$ 의 모든 정수해를 구하라는 문제라면 어떨까요?

물론 시간이 많이 걸리는 작업이긴 하지만 불가능한 작업은 아닙니다. 하지만, 좀 더 효율적인 방법이 있다면 좋겠죠?

■ 유클리드 호제법과 일차 부정방정식

정리

임의로 주어진 두 양의 정수 a, b에 대해,

$$\gcd(a, b) = ax + by$$

를 만족시키는 정수해 x, y가 항상 존재한다.

유클리드 호제법을 잘 이용하면 위와 같은 정리의 해 x, y를 구하는 방법을 알 수 있고, 그래서 위의 정리를 확신할 수 있습니다. 증명을 써놓을 수도 있지만, 이런 절차적인 해법을 증명으로 정리하는 것은 매우 복잡하고 길어지므로 생략하겠습니다.

우리는 다만 구체적인 문제를 통해 문제의 해 x, y를 구하는 방법을 익혀보도록 하겠습니다.

보기 1

$7497x + 19278y = 1071$ 을 만족하는 정수해 x, y를 모두 찾아보자.

풀이 유클리드 호제법으로 $\gcd(7497, 19278)$을 구해보자.

2	7497	19278	
		14994	
	7497	4284	1
	4284		
1	3213	4284	
		3213	
	3213	1071	3
	3213		
	0		

이 과정을 다시 옮겨보자.

$$\begin{aligned}
4284 = 3213 \times 1 + 1071 \quad &\Rightarrow \quad 1071 = 4284 - 3213 \\
7497 = 4284 \times 1 + 3213 \quad &\Rightarrow \quad 3213 = 7497 - 4284 \\
19278 = 7497 \times 2 + 4284 \quad &\Rightarrow \quad 4284 = 19278 - 7497 \times 2
\end{aligned}$$

이렇게 오른쪽과 같이 정리해두면 1071, 3213, 4284 들을 더 큰 수들로 나타낼 수 있다. 즉,

$$\begin{aligned}
1071 &= 4284 - 3213 = 4284 - (7497 - 4284) = -7497 + 4284 \times 2 \\
&= -7497 + (19278 - 7497 \times 2) \times 2 \\
&= 19278 \times 2 - 7497 \times 5
\end{aligned}$$

와 같이 최대공약수 1071을 최종적으로 원래의 두 수 7497과 19278에 대한 식으로 나타낼 수 있다. 여기서, $(x, y) = (-5, 2)$ 로 하면 하나의 특수해가 된다.

물론 위 식을 만족하는 x, y의 순서쌍은 이것 하나가 아니다. $7497 = 1071 \times 7$, $19278 = 1071 \times 18$ 이므로 $\text{lcm}(7497, 19278) = 7497 \times 18 = 19278 \times 7$ 이고, 따라서 x, y의 일반식은

$$x = -5 + 18k, \quad y = 2 - 7k \qquad (k\text{는 임의의 정수})$$

이 된다. ◇

예제 2

$52 = 1482x + 1274y$ 를 만족하는 정수해 x, y를 한 쌍만 구하여라.

풀이 유클리드 호제법을 다음의 방식으로 나타내어 보자.

	1482	1274	1
	1274		
6	208	1274	
		1248	
	208	26	8
	208		
	0		

숫자를 위 그림과 같이 2개를 적어 놓고 큰 수에서 작은 수를 나누고 몫을 그 옆에 적고 나머지는 아래로 내린다. 이 과정을 반복하여 0이 나오기 전에 나온 나머지가 바로 두 수의 최대공약수가 된다.
여기서 나온 최대공약수 26을 가지고 역순으로 생각하면 된다.

$$\begin{aligned} 52 = 2 \times 26 &= 2 \times (1274 - 6 \times 208) = 2 \times 1274 - 12 \times 208 \\ &= 2 \times 1274 - 12 \times (1482 - 1274) = 14 \times 1274 - 12 \times 1482 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 한 쌍의 해는 $(x, y) = (-12, 14)$ 로 하면 된다. ◇

예제 3

다음 식을 만족하는 정수해 a, b를 하나씩 찾아라.

(1) $123a + 321b = 21$

(2) $770a + 1015b = 35$

(3) $630a + 1386b = 126$

(4) $1835a + 2337b = 246$

(5) $2465a + 3132b = 319$

■ 일차 잉여방정식

합동식을 기억하고 있나요? 이번에는 다음과 같은 정수방정식을 봅시다.

보기 4

$3x \equiv 2 \pmod 5$ 를 풀어라.

풀이1 (계수 소거의 방법)
준식은 다음의 식들과 동치이다.

$$\begin{aligned} 3x &\equiv -3 \pmod 5 \\ x &\equiv -1 \pmod 5 \end{aligned}$$

준식의 우변에 5를 빼어 처음 식을 얻었고, 거기서 양변을 3으로 나누어 마지막 식을 얻었다. ♢

풀이2 (잉여 역수)
준식은 다음의 식들과 동치이다.

$$\begin{aligned} 6x &\equiv 4 \pmod 5 \\ x &\equiv 4 \pmod 5 \end{aligned}$$

준식의 양변에 2를 곱하여 처음 식을 얻었고, 거기서 좌변을 간단히 하여 마지막 식을 얻었다. ♢

풀이3 (일차 부정방정식)

준식은 $5 \mid 3x-2$ 임을 의미하므로, $3x-2=5k$, 즉 $3x-5k=2$ 의 일차 부정방정식을 푸는(k에는 관심이 없고 x에만 관심이 있기는 하지만) 문제로 귀착된다. 특이해를 하나 구하면 $(x,k)=(-1,-1)$ 을 들 수 있고, 그럼 동차식의 방법에 의해 일반해는 $(x,k)=(-1,-1)+(3,5)t$ 가 된다. x에만 관심이 있으므로, 원하는 해는 $x=-1+3t$, 즉 $x \equiv -1 \pmod 5$ 이다. ♢

[풀이1]이나 [풀이2]에는 다음과 같은 원리가 숨어 있습니다.

합동식의 기약화

(1) $ca \equiv cb \pmod m \iff a \equiv b \pmod m$ (단, $(c,m)=1$, 즉 서로 소)

(2) $da \equiv db \pmod{dm} \iff a \equiv b \pmod m$

(3) $ea \equiv eb \pmod m \iff a \equiv b \pmod{m/d}$ (단, $d=(e,m)$)

---

(3)은 (1)과 (2)의 일반화이기도 하지만, (1)과 (2)만으로 (3)의 역할을 대신할 수도 있습니다. 먼저 최대공약수 d로 나눠주고 나서 서로 소인 부분 e/d로 나눠주면 되니까요. 이 원리의 정확한 증명은 연습문제로 남겨두겠습니다.

위와 같은 정리를 바탕으로 한 [풀이1]과 [풀이2]는 [풀이3]보다 훨씬 짧고 보기 좋게 느껴집니다. 하지만, 숫자가 크고 복잡해지면 어떨까요? $119x \equiv 15 \pmod{23}$ 같은 문제라면, 우변 15를 119의 배수로 만드는 것이나[풀이1-계수소거], $119x$에 어떤 수를 곱해 (mod 23) 으로 x와 같도록 하는 것이나[풀이2-잉여역수], 다 난감해지는군요. [풀이3]이라면 언제든지 유클리드 호제법을 사용할 수 있지요.

사실 위 보기의 [풀이1]에서 우변 2에 5를 빼어준 것은 [풀이3]에서 찾은 특이해 $k=-1$ 에 의해 $5k$를 더해준 것입니다. 즉, [풀이1]도 결국 유클리드 호제법을 이용하여 푸는 것이 됩니다. 다음과 같이 말입니다.

예제 5

$119x \equiv 15 \pmod{23}$ 을 풀어라.

연습장 준식은 $119x - 23k = 15$ 의 일차 부정방정식을 푸는 것과 같다. 유클리드 호제법으로 특이해 하나를 찾아주자.

	119	23	5
	115		
5	4	23	
		20	
	4	3	1
	3		
	1		

로부터

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 = (119 - 115) - (23 - 20) = (119 - 5 \cdot 23) - (23 - 5 \cdot 4) \\ &= 119 - 6 \cdot 23 + 5(119 - 115) = 6 \cdot 119 - 31 \cdot 23 \end{aligned}$$

따라서, $15 = 15(6 \cdot 119 - 31 \cdot 23) = 90 \cdot 119 - 465 \cdot 23$ 이고, $(x, k) = (90, 465)$ 가 하나의 특이해가 된다. k에만 관심을 둔다면 $k \equiv -11 \pmod{119}$ 이다. ♢

답안 준식의 우변에 $-11 \cdot 23 = -253$ 를 더해주면(이 값은 호제법에 의해 구했음),

$$119x \equiv -238 \pmod{23}$$

$(119, 23) = 1$ 이므로, 양변을 119로 나누어주면

$$x \equiv -2 \pmod{23}$$

이 답이 된다. ♢

만일 [연습장]의 과정을 보여주지 않고 [답안]만을 적어 제출한다면, 그것은 맞는 답이긴 하겠지만, 그것을 읽는 사람은 그 답안이 어떻게 만들어진 것인지 알 수 없습니다. 이 교재에서는 여러분에게 여러 아이디어와 풀이과정을 설명하기 위해 [연습장]과 같은 과정을 일부분은 풀이에 넣으며 긴 답안을 제시하고 있는 경우가 많을 것입니다. 여러분이 시험 등에 임했을 때 시간의 제약을 많이 받는 경우라면 답안은 가급적이면 간명하게 적는 것이 좋겠죠. 즉, 여러분은 답안을 정리하는 연습도 많이 해보고, 어떻게 정리하는 것이 보다 알기쉽고 깔끔한가 하는 고민도 많이 하는 것이 좋습니다.

■ 잉여 역수

앞의 보기의 [풀이2]에서 본 **잉여 역수의 방법**도 [풀이1]에서처럼 유클리드 호제법을 적용하면 해결할 수 있습니다. 보기의 $3x \equiv 2 \pmod 5$ 의 문제라면 우리가 원하는 것은 $3x$에 얼마를 곱하면 (mod 5)로 x와 같을까 하는 것이므로, 결국

$$3u \equiv 1 \pmod 5$$

인 u를 찾는 것과 같은 문제가 됩니다. 이것을 푼 후에는 준식에 u를 곱하여

$$3ux \equiv 2u \pmod 5, \qquad \text{즉} \qquad x \equiv 2u \pmod 5$$

가 답이 되는 것이죠. 즉, 어떤 일차 잉여방정식($3x \equiv 2$)을 풀기 위해 보다 특수한 잉여방정식($3u \equiv 1$)을 먼저 풀자는 것이 되고, 그것은 결국 유클리드 호제법으로 해결이 되어야 하겠죠. 괜히 한 단계를 더 거치는 것처럼 느껴질 수도 있지만, 조금은 다른 관점이므로 잘 보아둡시다. 뒤에 배울 중국의 나머지 정리에서는 이런 잉여 역수의 방법이 문제를 보다 쉽게 바라볼 수 있게 하니까요.

잉여 역수라는 것은 어떤 수에 곱했을 때 1과 합동이 되도록 만드는 수를 말합니다. 위에서는 $3 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 5$ 이므로, 2는 (mod 5)에서 3의 잉여 역수입니다. 거꾸로, 3도 2의 잉여 역수이지요. 즉, 잉여 역수라는 개념은 실수나 유리수에서의 역수 개념(곱해서 1이 되는 수)을 합동식에 옮겨온 것이라고 볼 수 있습니다. 2와 3이 곱해서 1이 된다니, (mod 5)의 세계에서 2는 $\frac{1}{3}$의, 3은 $\frac{1}{2}$의 역할을 하는 수라고 볼 수 있는 것이랍니다. 3의 잉여 역수를 3^*와 같이 쓰기도 합니다.

예제 6

앞의 예제 $119x \equiv 15 \pmod{23}$ 을 119의 잉여 역수를 구해 풀어라.

풀이 $119u \equiv 1 \pmod{23}$ 을 만족하는 u가 119의 잉여 역수이다. 앞의 예제에서 $1 = 6 \cdot 119 - 31 \cdot 23$ 이었으므로, $119 \cdot 6 \equiv 1$, 따라서 $119^* = 6$ 이다. 이제 준식의 양변에 $119^* = 6$ 을 곱하면, $x \equiv 90 \equiv -2 \pmod{23}$ 이 된다. ♢

잉여 역수는 항상 존재하는 것은 아닙니다. $\pmod m$에서 a의 잉여 역수 a^*가 존재할 필요충분조건은, 즉 $au \equiv 1 \pmod m$ 의 해가 존재할 필요충분조건은, a와 m이 서로 소가 되어야 한다는 것입니다. 예를 들어, $4u \equiv 1 \pmod 6$ 과 같은 식의 해는 존재하지 않겠죠?

기본문제 2.1.1

다음의 연립 잉여방정식을 풀어라.

$$\begin{aligned} x+y &\equiv 3 \pmod 4 \\ x-y &\equiv 1 \pmod 4 \end{aligned}$$

관찰 먼저 위의 방정식이 해를 가지는가 가지지 않는가를 조사한다. 그리고 해를 가진다면 해를 구한다.

연립 잉여방정식은 보통의 연립방정식과 같이 풀어서는 곤란하다. 만일 위의 식을 풀 때, 두 식을 합하여 x에 대한 식을, 빼어 y에 대한 식을 구하면

$$2x \equiv 4 \pmod 4, \qquad 2y \equiv 2 \pmod 4$$

가 되고, 이 식은 x는 짝수, y는 홀수이면 되지만, $(x, y) = (0, 1)$ 은 원래 문제의 연립방정식을 만족하는 해가 아니다. 왜 그럴까?

풀이 두 식을 합하면 $2x \equiv 4 \pmod 4$, 즉 x가 짝수임을 알 수 있다. $x \equiv 0 \pmod 4$ 일 때는 $y \equiv 3 \pmod 4$ 일 수 밖에 없고, $x \equiv 2 \pmod 4$ 일 때는 $y \equiv 1 \pmod 4$ 일 수 밖에 없다.

따라서, $(x, y) \equiv (0, 3)$ 혹은 $(2, 1) \pmod 4$ 이다. ♢

유제 다음의 연립 잉여방정식을 풀어라.

$$\begin{aligned} x+2y &\equiv 0 \pmod 3 \\ 2x+y &\equiv 0 \pmod 3 \end{aligned}$$

기본문제 2.1.2

$x+2y+3z=3$ 일 때 x, y, z의 정수해를 모두 구하여라.

관찰 x, y, z 중에 어느 하나의 수를 임의의 값을 대입해 고정시켜도 나머지 두 변수의 계수는 서로 소이기 때문에 항상 해를 갖는다. 이로부터 일반식에 접근해 보자.

풀이 z에 임의의 정수 m을 대입하자. 그럼 식은

$$x+2y=3-3m$$

이 된다. 이 식의 특수해 하나를 구하면 $(x_0, y_0)=(-(3-3m), 3-3m)$ 이므로, 동차식의 방법에 의해 구한 일반해는

$$(x, y)=(-(3-3m), 3-3m)+k(-2, 1)$$

이 된다.
따라서, 구하는 일반해는 임의의 정수 m, k에 대해,

$$x=-3+3m-2k, \quad y=3-3m+k, \quad z=m$$

으로 나타낼 수 있다. ♢

주 이 문제의 일반해를 나타내는 방법은 이밖에도 많다.

유제 $3x+4y+6z=5$ 에서 x, y, z의 정수해를 모두 구하여라.

연습문제 2.1.1

다음 합동식을 풀어라.

(1) $7x \equiv 3 \pmod{15}$

(2) $12x \equiv 6 \pmod{15}$

(3) $5x \equiv 25 \pmod{35}$

연습문제 2.1.2

다음 연립 잉여방정식을 풀어라.

$$\begin{aligned} 3x + 5y &\equiv 1 \pmod{12} \\ 2x - 3y &\equiv 3 \pmod{12} \end{aligned}$$

연습문제 2.1.3

다음 식을 만족하는 해의 쌍 (a, b)를 하나씩 찾아라.

(1) $1845a + 984b = 123$

(2) $1751a + 1377b = 51$

연습문제 2.1.4

$527x + 3193y = 403$ 을 만족하는 정수 x, y의 일반적인 해를 구하여라.

연습문제 2.1.5

본문의 정리 '합동식의 기약화'를 증명하여라. 즉, 다음을 증명하여라.

(1) $ca \equiv cb \pmod{m} \iff a \equiv b \pmod{m}$ (단, $(c, m) = 1$)

(2) $da \equiv db \pmod{dm} \iff a \equiv b \pmod{m}$

(3) $ea \equiv eb \pmod{m} \iff a \equiv b \pmod{m/d}$ $(d = (e, m))$

연습문제 2.1.6

다음 합동식을 풀어라.

(1) $12378x \equiv 6 \pmod{3054}$

(2) $172x \equiv 1000 \pmod{20}$

연습문제 2.1.7

연립부정방정식

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 4 \\ 2x - z &= -1 \end{aligned}$$

의 정수해를 모두 구하여라.

연습문제 2.1.8

연립부정방정식

$$\begin{aligned} 3x + 6y + z &= 2 \\ 4x + 10y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

는 정수해를 갖지 않음을 증명하여라.

연습문제 2.1.9

본문에서 서술한 잉여 역수가 존재할 필요충분조건을 증명하여라. 즉, $ax \equiv 1 \pmod{m}$ 의 해가 존재할 필요충분조건은 $(a, m) = 1$ 임을 증명하여라.

연습문제 2.1.10

(mod m)에서 합동인 두 수의 잉여 역수는 또한 같음을 증명하여라. 즉, a와 b가 각각 m과 서로 소이고 $a \equiv b \pmod{m}$ 일 때 $a^* \equiv b^* \pmod{m}$ 임을 보여라.

연습문제 2.1.11

a, b, c, d가 주어진 정수일 때, 부정방정식

$$ax + by + cz = d$$

가 정수해를 가질 동치조건은 $\gcd(a, b, c) \mid d$ 임을 보여라.

연습문제 2.1.12

$x + 2y + 5z + 9w = 5$ 에서 x, y, z, w의 정수해를 모두 구하여라.

연습문제 2.1.13

스미스씨는 스케이트장을 운영하는데, 어른에게는 1100원을 어린이에게는 700원을 요금으로 받는다. 어느날 밤에 그 날의 수입을 정산했더니 모두 65700원이 되었다. 이 날 스케이트장을 찾은 손님은 최소 몇 명인가?

도전문제 2.1.1

$3a + 4b + 9c + 12d = 4$ 의 정수해를 모두 구하여라.

도전문제 2.1.2

a, b, c가 서로 소일 때 $xbc + yca + zab = n$의 일반 해를 구하여라.

2.2 중국의 나머지정리

여러분은 과자나 동전을 어떻게 세지요? 아마 하나하나 셀 수도 있을 테고, 열 개나 다섯 개씩 묶은 다음에 묶은 개수를 셀 수도 있을 것입니다. 그밖에도 세는 방법은 많이 있겠지요.

그럼 예를 들어서 군대에서 군인이 대략 천 명쯤 있는데 급히 수를 셀 일이 있다면 어떻게 해야할까요? 이럴 때 한 명 한 명 센다면 시간도 오래 걸리고 또 중간에 몇 명 빼먹거나 더 셀 수도 있을 겁니다. 이럴 때 군인의 수를 셀 수 있는 멋진 방법을 옛날 중국 군대에서 썼었습니다. 중국의 군대라면 천 명 정도의 수준이 아니라, 아마도 수만 수십만에 이르는 병력이었겠지요.

고대 중국의 전쟁터를 상상해 봅시다. 전투가 끝나고 대장은 몇 명의 병사들이 남았는지 세어야 합니다. 대장은 이럴 때 쓸 수 있는 쉬운 방법을 이미 알고 있습니다.

> “병사들, 두 명씩 짝지어 모여라. 짝을 못 이룬 사람이 있는가? 병사들, 세 명씩 짝지어 모여라. 짝은 못 이룬 사람이 몇 명인가? 이번에 다섯 명씩 짝지어 모인다. 짝을 못 이룬 사람이 몇 명인가? 일곱 명씩 짝지어 모여라. 짝을 못 이룬 사람이 몇 명인가? ...”

위에서 대장의 말 중에 나타난 특징이 무엇입니까? 우선 병사들을 몇 명씩 짝지어 모이도록 했습니다. 그리고 짝을 못 이룬 사람을 셌습니다. 이걸 수학적으로 표현하자면 n으로 나눈 나머지를 구한 셈이지요. 그리고 몇 명씩 모이게 했지요? 2명, 3명, 5명, 7명, ... 즉 소수입니다. 사실 꼭 소수일 필요는 없었습니다. 서로 소인 수로 모이게 했어도 충분했다는 것을 뒤에서 공부할 것입니다.

이처럼 몇 명씩 묶어서 그 나머지만 갖고 원래의 수를 계산하는 방법을 알려주는 것이 **중국의 나머지 정리**입니다. (사실은 이것을 중국인만 알고 있던 것은 아니지만, 흔히들 그렇게 부릅니다.)

보기 1

어느 반의 체육 시간에 학생들을 두 줄, 세 줄, 다섯 줄로 정렬했더니 항상 한 명이 남았다. 이 반의 학생 수는 몇 명일까? 단, 한 반의 학생 수는 30–40명 정도가 보통이다.

풀이 세 수 2, 3, 5로 나눠 각각 1이 남는 수를 생각하면 된다. $2\cdot3\cdot5+1 = 31$이 그런 성질을 갖는다는 것을 눈치챌 수 있을 것이다. 1, 61, 91, 121 등도 똑같은 성질을 갖지만, 한 학급의 학생 수로는 31이 가장 적당하다. ◇

주 위의 풀이만으로는 30으로 나눈 나머지가 1이 아닌 수 중에도 2, 3, 5로 나누어 각각 1이 남는 수가 더 없다는 것은 확인할 수 없다. 이것은 이 교재를 계속 공부하면 다른 수가 더 없다는 것을 알 수 있겠지만, 도전적인 학생이라면 여기서 스스로 왜 그럴까 한 번쯤 생각해보기 바란다.

위의 문제는

$$x \equiv 1 \pmod 2$$
$$x \equiv 1 \pmod 3$$
$$x \equiv 1 \pmod 5$$

의 연립 잉여방정식을 푸는 것과 같습니다. 그리고 그 해답은

$$x \equiv 1 \pmod{30}$$

이 된다고 쓸 수 있습니다.

여러 수로 나눈 나머지가 일정하게 나올 때에는 식의 수가 여러 개가 되더라도 위의 보기와 같이 쉽게 생각할 수 있었습니다. 나머지가 다양하게 나올 때에는 당장 식이 두 개만 되더라도 쉽지 않습니다. 다음과 같은 문제를 함께 생각해 볼까요?

보기 2

어느 육상팀의 연습 시간에 선수들을 네 줄, 다섯 줄로 세웠더니 각각 1명, 2명이 남았다. 이 팀의 선수들의 수는 어림잡아 30–40명 정도로 보인다. 정확히 몇 명일까?

풀이 정수의 분류를 이용하자.

네 줄로 세워 한 명이 남았으므로, 우선 이 팀의 선수수를 $4k+1$명이라고 할 수 있다. 이제 5로 나눈 나머지를 생각해야 하므로, 정수 k를

$$5l, \quad 5l+1, \quad 5l+2, \quad 5l+3, \quad 5l+4$$

의 다섯 가지로 분류해서 따져 보자. 이 각각의 경우에 대해 $4k+1$은 다음과 같이 된다.

$$\begin{array}{rcccccc} k & : & 5l & 5l+1 & 5l+2 & 5l+3 & 5l+4 \\ 4k+1 & : & 20l+1 & 20l+5 & 20l+9 & 20l+13 & 20l+17 \end{array}$$

이 중에서 5로 나누어 2가 남는 것은 $20l+17$뿐이다. 따라서, 17, 37, 57, 77, 97, ... 이런 수들이 모두 문제의 나머지를 만족하는 수들이다. 이 육상팀의 선수수는 어림잡아 30–40명이라고 하였으므로, 정확히 37명일 것이다. ♢

식이 둘일 때에 어떤 과정으로 풀 수 있을지 이제 그 방법을 알 것 같죠? 식이 셋일 때나 넷일 때, 다섯일 때 혹은 그보다 더 많을 때도 얼마든지 똑같은 알고리즘(절차, algorithm)으로 해결할 수 있을 것입니다. 물론 그런 경우에는 숫자도 커지고 따져야할 경우도 매우 많아지기 때문에 지루하고 복잡한 계산이 되고 실수할 염려도 많아지겠지만, 알고리즘이 있다는 것은 컴퓨터에게 문제를 주고서 계산을 맡길 수 있다는 얘기가 되기도 하지요.

$m_1, m_2, \ldots, m_n$들로 나누어 나머지가 각각 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 인 수는 $m_1 m_2 \cdots m_n$으로 나눈 나머지가 꼭 한 가지로 구해짐을 지금까지 살펴본 예제들로부터 짐작할 수 있을 것입니다. 즉, 다음과 같이 잉여합동식으로 이루어진 일차연립방정식 문제가 있으면

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

$(m_1, m_2, \ldots, m_n$은 각각 서로 소$)$

이 문제의 해 x는 항상 구할 수 있고, 또 mod $m_1 m_2 \cdots m_n$으로 유일하게 존재한다는 것이죠.

그런데, 위에 '$m_1, m_2, \ldots, m_n$은 각각 서로 소'라고 적어놓은 것은 왜일까요? 그러고보니 우리가 지금까지 살펴본 문제들은 나누는 수들이 2, 3, 5 혹은 4, 5로 서로 소인 수들을 이용하고 있군요. 처음 중국 군대의 병사들을 세는 방법에서도 2, 3, 5, 7 등으로 아예 소수들을 택하고 있고요. (소수들을 택하면 당연히 그들은 서로 소가 되겠지요?) 이것은 왜일까요? 서로 소가 아니면 이야기가 엉뚱해지는 경우가 있기 때문입니다. 4와 6은 서로 소가 아니므로 이 둘을 가지고 얘기를 만들어 봅시다.

보기 3

4로 나누어 3이 남고, 6으로 나누어 4가 남는 자연수 x를 하나 찾아라.

풀이 4로 나누어 3이 남는 수는 홀수이고, 6으로 나누어 4가 남는 수는 짝수이므로, 그런 자연수 x는 찾을 수 없다. 문제가 틀렸다. ♢

물론 이렇게 문제가 아예 잘못되는 경우만 있는 것은 아닙니다. 실제로 존재하는 수를 하나 골라 그것을 4로 나누어보고 또 6으로 나누어봐서 나오는 나머지를 알아낸 후, 그것으로 문제를 낸다면 아무런 오류도 생기지 않을 것입니다.

보기 4

4로 나누어 2가 남고, 6으로 나누어 4가 남는 자연수 중 가장 작은 수를 구하여라.

풀이 4로 나누어 2가 남고, 6으로 나누어 4가 남는다는 것은 둘다 우선 짝수임을 말하고 있다. 따라서 구하는 수 x를 $2k$로 둘 수 있다. 그럼 x를 4로 나누어 2가 남는다는 것은 k를 2로 나누어 1이 남는다는 것과 같고, 또 x를 6으로 나누어 4가 남는다는 것은 k를 3으로 나누어 2가 남는다는 것과 같습니다. 즉, $x = 2k$이고,

$$\begin{bmatrix} 2k \equiv 2 \pmod{4} \\ 2k \equiv 4 \pmod{6} \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} k \equiv 1 \pmod{2} \\ k \equiv 2 \pmod{3} \end{bmatrix}$$

라는 것이다. 이제 2와 3이 서로 소인 수가 되었으므로, 앞의 방법으로 풀어주면

$$k \equiv 5 \pmod 6$$

임을 구할 수 있다. 따라서 가장 작은 자연수 x는 $k = 5$일 때인 10이다. ◇

위 예제에서 살펴보았듯이 나누는 수 $m_1, m_2, \ldots, m_n$들이 서로 소가 아닐 때에는, 적당한 과정을 잘 밟아주면 문제가 모순이 되어 원하는 x가 존재하지 않거나(보기 3), 아니면 서로 소인 $m_1', m_2', \ldots, m_n'$들에 대한 문제로 바꾸어 줄 수 있습니다(보기 4). 그래서 이들이 서로 소일 때에만 주목하고, 그때의 문제를 어떻게 풀지에 대해서만 관심을 갖는 것입니다.

■ 중국의 나머지 정리

중국의 나머지 정리는 지금까지 문제를 풀어온 방법들보다 좀더 효율적인 방법을 담고 있습니다. 다음 문제의 풀이를 주의깊게 살펴보면 그 아이디어를 엿볼 수 있을 것입니다.

보기 5

세 식 $x \equiv 1 \pmod 2$, $x \equiv 0 \pmod 3$, $x \equiv 3 \pmod 5$ 를 만족시키는 정수 x를 모두 구하여라.

풀이 2, 3, 5로 나누었을 때의 나머지를 생각하는 문제이다. 다음과 같은 세 수 p, q, r을 생각할 수 있을까?

- p는 2로 나누어 1이 남고, 3이나 5로는 나누어 떨어진다.
- q는 3으로 나누어 1이 남고, 2나 5로는 나누어 떨어진다.
- r은 5로 나누어 1이 남고, 2나 3으로는 나누어 떨어진다.

이런 p, q, r을 구했다면, x를 다음과 같이 두는 것으로 풀이가 끝난다.

$$x \equiv p \cdot 1 + q \cdot 0 + r \cdot 3 \pmod{2 \cdot 3 \cdot 5}$$

여기서 1, 0, 3은 문제에서의 나머지들이고, 이렇게 두면 다음과 같은 식의 되어 문제의 조건을 만족한다는 것을 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} x &= p\cdot 1 + q\cdot 0 + r\cdot 3 + 2\cdot 3\cdot 5\cdot k \\ &\equiv \begin{cases} \textcircled{1}\cdot 1 + \textcircled{0}\cdot 0 + \textcircled{0}\cdot 3 + 0\cdot k = 1 \pmod 2 \\ \textcircled{0}\cdot 1 + \textcircled{1}\cdot 0 + \textcircled{0}\cdot 3 + 0\cdot k = 0 \pmod 3 \\ \textcircled{0}\cdot 1 + \textcircled{0}\cdot 0 + \textcircled{1}\cdot 3 + 0\cdot k = 3 \pmod 5 \end{cases} \end{aligned}$$

그럼, 이제 이와 같은 p, q, r을 구해주는 것만이 남았다. 이것은 어렵지 않다. p는 우선 3이나 5의 배수이므로 $p = 15p'$라 두고, $15p' \equiv 1 \pmod 2$ 가 되는 p'을 찾으면 된다. $p' = 1$ 로 두면, 즉 $p = 15$ 로 하면 되겠다. 같은 방법으로 q, r을 구해주면, $10q' \equiv 1 \pmod 3$ 에서 $q' = 1$, $q = 10$, 또 $6r' \equiv 1 \pmod 5$ 에서 $r' = 1$, $r = 6$ 로 하면 된다. 따라서

$$x \equiv 15\cdot 1 + 10\cdot 0 + 6\cdot 3 = 33 \equiv 3 \pmod{2\cdot 3\cdot 5 = 30}$$

이 구하는 답이다. (q는 0과 곱해지므로 구하지 않아도 됐었다.) ♢

그럼 이제 중국의 나머지 정리와 그 증명 방법을 소개할 때가 되었습니다.

정리 (중국의 나머지 정리)

서로 소인 자연수 $m_1, m_2, \ldots, m_n$에 대해, 다음의 연립방정식

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 \pmod{m_1} \\ x &\equiv a_2 \pmod{m_2} \\ &\vdots \\ x &\equiv a_n \pmod{m_n} \end{aligned}$$

은 해를 갖고, 그 해는 $(\text{mod } m_1 m_2 \cdots m_n)$ 으로 오직 하나뿐이다.

증명 각각의 $k = 1, 2, \ldots, n$ 에 대해

$$M_k = \frac{m_1 m_2 \cdots m_n}{m_k}$$

라고 하자. 즉, M_k는 m_i들 중에서 m_k만 빼고 모두 곱한 것이다. $m_1, \ldots, m_n$은 모두 서로 소라고 하였으므로, M_k도 m_k와 서로 소이다. 따라서, 앞 절에서 배운 정리에 의해,

$$A_k M_k \equiv 1 \pmod{m_k}$$

인 정수 A_k를 구할 수 있다. 그럼 $P_k = A_k M_k$라 하면, P_k는 다음과 같은 성질을 갖는다.

$$P_k \equiv \begin{cases} 0 \pmod{m_i}, & i \neq k\text{일 때}, \\ 1 \pmod{m_i}, & i = k\text{일 때} \end{cases}$$

이제

$$x = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots + P_n a_n$$

으로 놓자. 그럼 각각의 k에 대해

$$x \equiv 0a_1 + 0a_2 + \cdots + 1a_k + \cdots + 0a_n = a_k \pmod{m_k}$$

이므로, x는 연립방정식을 만족하는 한 해가 된다.

다음으로, x가 연립방정식을 만족하는 해로써, mod $m_1 m_2 \cdots m_n$ 으로 오직 하나뿐임을 증명하겠다. 또 하나의 정수 y가 같은 연립방정식을 만족한다고 가정하자. 그럼

$$x \equiv a_k \equiv y \pmod{m_k} \quad \text{이므로,} \quad m_k \mid x - y$$

가 된다. $m_1, m_2, \ldots, m_n$이 각각 서로 소이고 $x - y$는 이들 각각의 배수이므로,

$$m_1 m_2 \cdots m_k \mid x - y$$

이기도 하다. 따라서

$$x \equiv y \pmod{m_1 m_2 \cdots m_k}$$

이고, 따라서 그러한 해는 오직 x뿐이다. □

중국인의 나머지 정리는 아주 중요하고, 또 많은 응용을 갖고 있습니다. 여러분 스스로 문제를 해결해보고 또 그것을 중국인의 나머지 정리의 방식으로 풀면서 충분히 연습을 하여 자기 것으로 만들기 바랍니다. 또한 해를 구하는 방법뿐만이 아니라 해가 존재한다는 사실 자체도 매우 중요하므로 그것을 꼭 기억하시기 바랍니다.

기본문제 2.2.1

다섯 명의 해적이 있었고 이들은 어림잡아 100닢이 좀 넘을 정도의 금화를 갖고 있었다. 금화를 똑같이 나누려고 했는데, 차례로 나눠주다보니 꼭 한 닢이 부족했다. 어떻게 할까 논의하다가 싸움이 벌어졌고, 그래서 한 명이 죽었다. 남은 네 명이서 다시 금화를 나누니, 또 한 닢이 부족했다. 다시 싸움이 벌어졌고, 그래서 또 한 명이 죽었다. 남은 세 명이서 다시 금화를 나누었는데 여전히 한 닢이 부족한 것이었다. 아, 금화 한 닢만 더 있었더라면 평화로웠을텐데! 해적들은 몇 닢의 금화를 가지고 있었을까?

관찰 문제의 조건을 잉여 방정식으로 쓰면

$$x \equiv 4 \pmod 5$$
$$x \equiv 3 \pmod 4$$
$$x \equiv 2 \pmod 3$$

으로 나타낼 수 있을 것이다. (단 $100 < x < 150$ 정도이다.)

풀이1 (나머지가 일정함을 이용)

이 문제에서 구하는 금화의 수 x는 5, 4, 3으로 나누었을 때 나머지가 각각 4, 3, 2로 다르지만, 잘 생각해보면 나머지가 모두 일정할 때와 마찬가지임을 알 수 있다. 즉, 문제의 연립방정식은

$$x \equiv -1 \pmod 5$$
$$x \equiv -1 \pmod 4$$
$$x \equiv -1 \pmod 3$$

와 같다. 따라서, $x \equiv -1 \pmod{60 = 5 \cdot 4 \cdot 3}$ 이고, $x = 119$ 가 가장 적절한 답이 되겠다. ♢

풀이2 (정수의 분류를 이용)

처음 식에서 $x = 5k + 4$ 로 두고, 두 번째 식을 검토할 수 있도록 k를 4로 나눈 나머지에 따라 분류하자. k에 $4l - 2$, $4l - 1$, $4l$, $4l + 1$ 을 각각 대입해보면, x는

$20l-6$, $20l-1$, $20l+4$, $20l+9$ 가 되고, 이 가운데 $4r+3$ 꼴인 것은 $20l-1$ 뿐이다. 이제 마지막 세 번째 식을 검토할 수 있도록 l을 $3m$, $3m+1$, $3m+2$ 로 분류해 대입해보면, x는 각각 $60m-1$, $60m+19$, $60m+39$ 가 되고, 이 가운데 $3r+2$ 꼴인 것은 $60m-1$ 뿐이다. ♢

풀이3 (잉여방정식의 풀이)

첫 식에서 $x=5k+4$ 이다. 이를 둘째 식에 대입하면 $5k+4 \equiv 3 \pmod 4$, 즉 $k \equiv 3 \pmod 4$ 이다. $k=4l+3$ 을 대입하면 $x=20l+19$. 이것을 세째 식에 대입하자. $20l+19 \equiv 2 \pmod 3$ 은 간단히 하면 $-l+1 \equiv 2 \pmod 3$ 이다. 이항하여 정리하면 $l \equiv -1 \pmod 3$, 즉 $l=3m-1$ 이다. 이것을 다시 대입하면 $x=60m-1$ 을 얻는다. ♢

풀이4 (드디어 중국의 나머지 정리!)

$P_1 = 4\cdot 3\cdot A_1 \equiv 1 \pmod 5$ 를 풀면 $A_1=3$, $P_1=36$.

$P_2 = 5\cdot 3\cdot A_2 \equiv 1 \pmod 4$ 를 풀면 $A_2=-1$, $P_2=-15$.

$P_3 = 5\cdot 4\cdot A_3 \equiv 1 \pmod 3$ 을 풀면 $A_3=-1$, $P_3=-20$.

따라서, $x \equiv 4P_1+3P_2+2P_3 = 59 \equiv -1 \pmod{60}$. ♢

유제 해적들이 금화를 나누는데, 다섯 명, 네 명일 때 각각 1, 2닢이 남았고 세 명이 되었을 때 비로소 정확히 금화를 똑같이 나눌 수 있었다고 하자. 금화는 모두 100닢이 좀 넘는 정도였다면, 금화는 정확히 몇 닢이었을까?

기본문제 2.2.2

연립 잉여방정식 $x \equiv 2 \pmod 6$, $x \equiv 5 \pmod 7$, $x \equiv 5 \pmod 9$ $x \equiv 3 \pmod{11}$ 을 풀어라.

풀이 6, 7, 9, 11은 서로 소인 수들이 아니다. 중국의 나머지 정리를 이용하기 위해 먼저 이들을 서로 소인 수들에 대한 연립 잉여방정식으로 분해하자. $x \equiv 2 \pmod 6$ 을 분해하면 $x \equiv 2 \equiv 0 \pmod 2$ 와 $x \equiv 2 \pmod 3$ 이 된다. $x \equiv 2 \pmod 3$ 은 $x \equiv 5 \pmod 9$ 에도 이미 들어있는 식이므로 생략할 수 있다. 따라서, 문제는 $x \equiv 0$ (2), $x \equiv 5$ (7), $x \equiv 5$ (9), $x \equiv 3$ (11) 과 같다.
이제 중국인의 나머지 정리를 사용하기 위해 문자를 배정해주면, $m_1 = 2$, $m_2 = 7$, $m_3 = 9$, $m_4 = 11$; $M_1 = 693$, $M_2 = 198$, $M_3 = 154$, $M_4 = 126$; $a_1 = 0$, $a_2 = 5$, $a_3 = 5$, $a_4 = 3$; 그리고 $M = 1386$ 이다.
$x \equiv a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3 + a_4P_4 \pmod M$ 인 P_1, P_2, P_3, P_4를 찾자. $a_1 = 0$ 이므로 P_1은 구할 필요가 없다.

$$P_2 = M_2A_2 = 198A_2 \equiv 1 \pmod 7$$
$$P_3 = M_3A_3 = 154A_3 \equiv 1 \pmod 9$$
$$P_4 = M_4A_4 = 126A_4 \equiv 1 \pmod{11}$$

이 잉여방정식들을 각각 풀면(앞 절에서 유클리드 호제법을 사용한 해법을 공부하였다), $A_2 = 4$, $A_3 = 1$, $A_4 = -2$, 즉 $P_2 = 792$, $P_3 = 154$, $P_4 = -252$ 가 된다. 따라서, $x \equiv a_1P_1 + a_2P_2 + a_3P_3 + a_4P_4 = 3960 + 770 - 756 \equiv -184 \pmod{1386}$ 이다. ♢

유제 연립 잉여방정식 $x \equiv 1 \pmod 3$, $x \equiv 2 \pmod 4$, $x \equiv 3 \pmod 5$ $x \equiv 4 \pmod 6$ 을 풀어라.

기본문제 2.2.3

임의의 자연수 k에 대하여, k개의 연속된 합성수를 항상 찾을 수 있음을 증명하여라.

증명 찾으려는 연속된 합성수를 $n+1$, $n+2$, ..., $n+k$ 라고 하자. 이 각각의 수들이 (자기 자신보다는 작은) 적당한 약수를 갖도록 하면 될 것이다.
손쉬운 예로, k개의 서로 다른 소수 p_1, p_2, ..., p_k 를 아무렇게나 택하고, $n+1$은 p_1의 배수, $n+2$는 p_2의 배수, ..., $n+k$는 p_k의 배수가 되도록 할 수 있다면 충분하다. 그리고 이것은

$$\begin{aligned} n+1 &\equiv 0 \pmod{p_1} \\ n+2 &\equiv 0 \pmod{p_2} \\ &\vdots \\ n+k &\equiv 0 \pmod{p_k} \end{aligned}$$

의 연립 잉여방정식의 해를 찾는 것과 같다. 중국의 나머지 정리의 의해, 이것의 해는 mod $p_1p_2\cdots p_k$ 에 대해 유일하게 존재한다. 즉, 실제로는 이런 정수 n이 무한히 많이 존재하고, 또 얼마든지 큰 것으로 택할 수 있다.
따라서, k개의 연속된 합성수의 열은 항상 (무한히 많이) 존재한다. □

별해 $n=(k+1)!+1$ 로 두면 그만이다. 그럼 $n+1=(k+1)!+2$는 2의 배수, $n+2=(k+1)!+3$은 3의 배수, ..., $n+k=(k+1)!+(k+1)$는 $(k+1)$의 배수가 되어 모두 합성수이다. ♢

유제 임의의 자연수 k에 대하여, 다음 성질을 만족시키는 k개의 연속된 자연수의 열 $a_1, a_2, \ldots, a_k$ 가 무한히 많음을 보여라.

"각각의 i $(1 \le i \le k)$에 대하여 $(p_i)^i \mid a_i$ 인 소수 p_i가 존재한다."

연습문제 2.2.1

다음 연립 잉여방정식을 풀어라.

$$\begin{cases} 2x \equiv 1 \pmod 5 \\ 3x \equiv 3 \pmod 7 \\ 4x \equiv 5 \pmod 9 \end{cases}$$

연습문제 2.2.2

지혜네 학교의 정원은 4000명 정도이다. 어느날 조회 때 교장선생님이 17명씩 세니까 3명이 남았다. 또 16명씩 세니까 10명이 남았다. 또 15명씩 세니까 딱 나누어졌다. 지혜네 학교 학생은 몇 명인가?

연습문제 2.2.3

훈영이네 반 체육시간에 선생님께서 학생들을 3열 종대로 모이게 하고 뒤로 번호를 시켰더니 마지막이 2결이었다. 다시 4열 종대로 모이게 하고 뒤로 번호를 시켰더니 역시 마지막이 2결이었다. 또 5열 종대로 모이게 해도 역시 2결이었다. 훈영이네 반은 원래 학생수가 60명이다. 그럼 이 날 체육시간에 결석한 학생은 몇 명인가?

연습문제 2.2.4

중국의 나머지정리를 이용해 잉여방정식 $x^2 \equiv 1 \pmod{56}$ 을 풀어라.

도전문제 2.2.1

$(p-1)!+1=p^k$ 이 되는 소수 p와 정수 k를 구하여라. (이 문제를 꼭 중국의 나머지 정리를 이용해서만 풀 필요는 없습니다.)

도전문제 2.2.2

평면 위에 2개의 격자점(가로 세로 좌표가 모두 정수인 점)이 임의로 주어져 있는데, 이 2개의 점을 연결하는 선분을 그으면 그 선분 위에 다른 격자점은 없다. 이 때, 또 다른 하나의 격자점을 택하고 싶은데, 이 점에서 처음의 두 점에 이은 선분 위에도 다른 격자점이 없도록 하고 싶다. 어떻게 하면 될까?

또, 위와 같이 3개의 격자점이 임의로 주어져 있고, 각 점들을 잇는 선분 위에 다른 격자점이 없을 때, 다른 네 번째 점을 찾아 역시 그 점과 처음의 세 점을 이은 선분 위에도 다른 격자점이 없도록 할 수 있을까?

2.3 수론의 실전

그동안 정수에 관한 여러 가지 성질과 이론을 많이 배웠습니다. 여기서는 그동안 배운 여러 가지 것들을 종합적으로 사용하며 본격적으로 경시대회 수론 영역의 문제들에 도전해 봅시다.

예제 1

$36^{36}+41^{41}$ 이 77로 나누어떨어짐을 보여라.

증명 $41 \equiv -36 \pmod{77}$ 이므로

$$36^{36}+41^{41} \equiv 36^{36}+(-36)^{41} = 36^{36}(1-36^5) \pmod{77}$$

이다. $36^5 \equiv 1 \pmod 7$ 이고 $36^5 \equiv 3^5 = 243 \equiv 1 \pmod{11}$ 이므로 $36^5 \equiv \pmod{77}$. 따라서, 증명되었다. □

예제 2

(1894년 헝가리 Eötvös 경시대회) 두 식 $2x+3y$와 $9x+5y$가 17로 나누어 떨어지는 해집합은 서로 같음을 보여라.

증명 다음과 같이

$$\begin{aligned} 17 \mid 2x+3y &\iff 17 \mid -4(2x+3y) \\ &\iff 17 \mid -8x-12y+17(x+y) \\ &\iff 17 \mid 9x+5y \end{aligned}$$

두 식이 17로 나누어지는 것은 동치임을 알 수 있다. □

예제 3

(1976년 미국 수학올림피아드) $a^2+b^2+c^2=a^2b^2$ 을 만족하는 모든 정수해를 구하여라.

풀이 완전제곱수는 4로 나눈 나머지가 짝수일 경우 0, 홀수일 경우 1이다. a, b 둘다 홀수이면 좌변은 mod 4로 2 혹은 3이고 우변은 1이어서 해가 없다. a, b 중에 짝수가 있으면 우변이 4의 배수가 되므로 좌변도 4의 배수라야 하는데 역시 mod 4로 따지면 a, b, c가 모두 짝수라야 함을 알 수 있다.
a, b, c가 모두 0은 아니라면, 이들을 소인수분해했을 때 2의 지수가 가장 작은 것이 있다. 즉, $a = 2^m a_0$, $b = 2^m b_0$, $c = 2^m c_0$ 이고 a_0, b_0, c_0 중에 홀수인 것이 있도록 정수 $m \geq 1$ 을 잡을 수 있다. 그럼

$$a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = 2^{2m} a_0^2 b_0^2$$

이다. 앞에서 했던 것처럼, 우변이 4의 배수이므로 좌변도 4의 배수라야 하는데 그럼 mod 4로 따져 a_0, b_0, c_0이 모두 짝수라야 한다. 이것은 모순이므로, 준식의 정수해는 $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ 밖에 없다. ♢

예제 4

a, b, c가 양의 정수이고 ab, bc, ca가 모두 세제곱수이면 a, b, c도 모두 세제곱수임을 증명하여라.

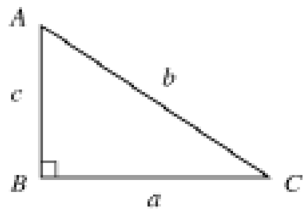
증명 $(abc)^2 = ab \cdot bc \cdot ca = m^3 n^3 r^3 = (mnr)^3$ 이므로 $(abc)^2$은 제곱수이며 동시에 세제곱수이다. 즉, 여섯제곱수이다(소인수분해하여 각 지수를 생각하면 쉽다). 따라서, abc는 세제곱수이고, 그럼 $a = abc/bc$, $b = abc/ca$, $c = abc/ab$ 도 세제곱수일 수밖에 없다. □

■ 피타고라스 삼원쌍

여러분은 다음의 식을 많이 보았을 것입니다.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

이 식은 피타고라스의 정리라고 불리는 직각삼각형의 세 변에 관한 식입니다.



이러한 관계식을 만족하는 세 개의 자연수로 이루어진 순서쌍 (a, b, c)를 **피타고라스 삼원쌍**이라고 부릅니다. 예를 들어 $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(6, 8, 10)$ 등이 있습니다. 혹은 (a, b)만을 **피타고라스쌍**이라고 부르기도 하고, 때로 (a, b, c)를 피타고라스쌍이라 편하게 부르기도 합니다.

물음 5

피타고라스쌍을 모두 구할 수 있을까?

이 문제를 풀어보는 것은 이만큼 수론에 관한 수업이 이루어진 단계에서 매우 적절한 연습이 됩니다. 먼저 아래의 내용으로 넘어가지 말고 이 문제를 혼자서 풀어보세요. 만일 이 문제를 전에 접해본 적이 없는데 1시간 이내에 모든 피타고라스 삼원쌍의 일반적인 꼴을 구해낼 수 있었다면 여러분은 자신의 실력과 앞으로의 발전에 충분한 자신감을 가져도 될만한 수준에 올라있습니다. 그렇지 않았더라도 단 한 문제로 모든 것을 평가할 수는 없는 것이니 실망하지 말고, 다음의 단계를 짚어보며 자신이 어디까지 이 문제에 대한 연구를 진행했는지 검토해보세요. 그리고, 나머지 단계를 다시 스스로 완성해보면 좋겠네요.

1. $\gcd(a, b, c) = 1$ 인 것들만 구하면 된다. (이런 것을 **원시적 피타고라스쌍**이라고 한다.) 나머지 피타고라스쌍은 이들의 상수배로 표현된다. 이하의 단계에서는 원시적 피타고라스쌍에 대해서만 논의한다.

2. $\gcd(a, b) = \gcd(b, c) = \gcd(c, a) = 1$ 이다.

3. c는 홀수이고, a와 b는 하나는 짝수, 하나는 홀수이다. 일반성을 잃지 않고, 이하에서는 b를 짝수로 한다.

4. $b^2 = c^2 - a^2 = (c+a)(c-a)$ 에서 양변의 인수들은 모두 짝수이고, 그래서 $(\frac{b}{2})^2 = (\frac{c+a}{2})(\frac{c-a}{2})$ 로 써도 각 항이 자연수이다.
5. $\gcd(\frac{c+a}{2}, \frac{c-a}{2}) = 1$ 이다.
6. 그래서 두 수의 곱이 제곱수(b^2)가 되려면, 적당한 정수 m, n에 대해 $\frac{c+a}{2} = m^2$, $\frac{c-a}{2} = n^2$ 이어야 한다.
7. 이제 $(a, b, c) = (m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2)$ 이 된다.

조금 더 말한다면, m과 n은 $m > n$ 이고 홀짝이 다르며 서로 소인 자연수라야 합니다. 하지만, 우리의 원래의 목적이 '원시적' 피타고라스쌍에만 국한하여 구하는 것이 아니고 일반적인 피타고라스쌍을 구하는 것인 이상에는 이런 사실에 집착할 필요가 없습니다. 피타고라스쌍은 그래서 다음과 같이 정리됩니다.

피타고라스쌍

피타고라스 삼원쌍은 다음과 같은 꼴의 수들이다. (단, m, n, r은 정수)

$$(m^2 - n^2)r, \quad 2mnr, \quad (m^2 + n^2)r$$

앞에 제시된 단계들의 증명을 확인해봅시다.

단계1 (a, b, c)가 피타고라스쌍이고 $\gcd(a, b, c) = d > 1$ 이면, $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d})$ 도 $(\frac{a}{d})^2 + (\frac{b}{c})^2 = (\frac{c}{d})^2$ 와 같이 정수해이다. 즉, (a, b, c)는 원시적 피타고라스쌍 $(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}, \frac{c}{d})$의 정수배로 나타난다. 따라서, 원시적 피타고라스쌍만 모두 구한 후 그의 정수배로 일반해를 표현해주면 되겠다. □

단계2 연습문제. □

단계3 단계2에 의해 $\gcd(a, b) = 1$ 이므로 a, b가 둘 다 짝수일 수는 없다. 만약 a, b가 둘 다 홀수이면, c는 짝수가 되나, 이 경우 $2 \equiv 0 \pmod 4$ 가 되어 모순이다. ($\because$ mod 4로 홀수의 제곱은 1, 짝수의 제곱은 0) 그러므로 a, b 중 하나는 홀수이고 다른 하나는 짝수이며, c는 홀수이어야 한다. □

단계4 자명하다. □

단계5 연습문제. □

단계6 연습문제. □

단계7 단계6으로부터 자명하다. 그리고, 단계1에서 언급했던 사실로부터, 피타고라스쌍의 일반적인 꼴은 원시적 해에 임의의 정수 r을 곱한 형태로 나타낼 수 있으므로

$$(m^2 - n^2)r, \quad 2mnr, \quad (m^2 + n^2)r$$

이 된다. □

♡ 쉬어갑시다 ♡

다음의 정리를 **페르마(Fermat)의 대정리** 혹은 Fermat의 마지막정리라고 합니다.

> "$n \geq 3$ 일 때, 부정방정식 $x^n + y^n = z^n$ 의 양의 정수해는 존재하지 않는다."

페르마는 직업적인 수학자가 아니라, 툴르즈 지방의회에 소속된 법률가이자 치안판사였습니다. 그는 수학에 대한 정규교육을 받은 적도 없었지만, 수학에 강렬한 애착을 갖게 되었습니다. 그는 자신의 생존기간 중 수학에 대해 사실상 아무것도 출판하지 않았습니다. 그러나 그는 당시의 위대한 수학자들과 매우 많은 서신왕래를 하였습니다.

이 유명한 마지막정리의 형식화에 이르는 과정은 매우 흥미롭습니다. 1453년 콘스탄티노플이 터키에 의해 함락되었을 때 비잔틴 학자들은 고대 그리스 문헌을 갖고 서유럽으로 피신했습니다. 그 중에는 당시까지 보관되던 디오판토스의 산학(arithemetica)이 있었습니다. 이 책은 후에 1621년 중 그리스 문헌을 라틴어로 번역한 새로운 개정판이 출판되면서 유럽수학자들에게 소개되었습니다.

기원후 3세기경 쓰여진 산학은 디오판토스의 중요한 업적이고, 대수학에 관해 쓰여진 최초의 책 중 하나였습니다. 그 중에는 $x^2 + y^2 = z^2$ 을 만족시키는 유

리수 x, y, z를 찾는 것이 있었습니다. 페르마는 여백의 주석을 통해서 n이 2보다 큰 자연수이면 방정식 $x^n + y^n = z^n$ 이 자명하지 않은(셋 중 어느 것도 0이 아닌) 유리근을 가지지 못한다고 썼습니다. 또한 여백이 부족해 증명을 적지 못한다고도 썼습니다.

이것이 '마지막정리'로 불리는 유래는 약간 모호합니다. 그가 이 유명한 여백의 기록을 남긴 것이 디오판토스의 책을 처음 공부하는 1630년대로 추측되고 있고, 그것은 그의 수학적 경력의 초기였습니다. 아마도 이 정리는 분명히 그의 마지막 정리가 아니고, 오히려 이 이름은 그가 죽은 뒤에 남긴 많은 정리 중에서 증명되어야 할 마지막 정리라는 사실에 기인한 것 같습니다.

페르마가 진정으로 알았던지 몰랐던지 간에, 그 후 350년 동안 전문적인 수학자들의 노력으로도 얻을 수 없었던 결과를 17세기 아마추어 수학자가 선언했다는 것은 놀라운 일입니다. 많은 위대한 수학자들이 일생을 바쳐 이 문제와 씨름을 했고, 이 문제에 대한 연구는 완전히 새로운 수학 영역을 개척했습니다.

- $n = 3$: 오일러(Euler)가 증명
- $n = 5$: 디리끌레(Dirichlet)가 증명
- $n = 7$: 르장드르(Legendre)가 증명

1930년대 밴 다이머는 617까지의 모든 소수를 조사하였습니다. 그 후 30,000까지, 1976년에는 125,000보다 작은 모든 소수가 조사되었습니다. 숫자가 증가되어가면서 이 정리가 참일 것 같은 확신이 커지긴 하지만, 이 실험은 더욱더 어려워져가고 또 아무리 큰 숫자까지 조사하더라도 더욱 많은 수들이 미지 속에 남아있습니다.

와일즈(A. Wiles)는 프린스톤 고등 기술 연구소의 교수로 1994년 영국 캠브리지에서 열린 학회에서 페르마의 마지막정리를 증명했다고 발표하였습니다. 그 증명에는 미비한 점이 있음이 지적되었고, 그도 이를 시인하였습니다. 그 후, 1994년 10월의 강연에서 Wiles와 Taylor 교수의 합작으로 이전의 미비점을 메꾸어서 완벽한 증명에 도달할 수 있었습니다. 그들의 공동작업은 1995년 Annals of Mathematics 5월호에 실렸습니다. 수 많은 사람들이 이를 읽었고 아마도 백 명 정도의 전문가는 이를 잘 이해할 수 있을 것입니다. 그들의 증명은 수학계에서 일반적으로 받아들여지고 있습니다.

그럼 과연 페르마는 이 정리를 증명하였을까요? 아니라는 것이 정설입니다. 그가 이 증명을 발견하였다는 주장을 낙서한 것은 자신의 경력 초기였습니다. 훨씬 후에 그는 $n = 4$, $n = 5$ 인 경우를 증명하기 위하여 시간과 노력을 소비하였습니다. 그가 증명을 발견하였다면, 이러한 특수한 경우를 위하여 시간을 소비하지 않았을 것입니다. 아마도 그는 자신의 증명에서 잘못된 부분이 있었음을 발견했지만, 굳이 예전의 낙서를 들춰 고쳐야겠다는 필요를 느끼지는 못했을 것입니다.
수백년간 수많은 수학자들에 의해 이 정리에 대한 연구가 진행되면서 관련된 추측(Conjectures)들도 많이 등장하였습니다. 그 중 어떤 것은 사실로, 어떤 것은 거짓으로 밝혀졌고, 어떤 것은 해결되지않고 남아있을 것입니다.
오일러는 다음과 같은 추측을 하였습니다.

"$x^n + y^n + z^n = c^n$ 은 n이 4 이상의 자연수일 때 해를 갖지 않는다."

그러나 Noam Elkies는 반례를 발견하였습니다. 즉,

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$$

이렇게 큰 수에 이르러서야 반례가 발견되는 문제는 얼마든지 더 있을 수 있습니다. 아무리 오랜 시간 동안 얼마나 큰 수까지 실험을 했더라도, 상상할 수 없이 큰 수에서 한 순간 반례가 생기면 그것은 수학적으로 참이 아닌 것입니다. ♣

기본문제 2.3.1

이차방정식 $2x^2 - 6x + (1+a) = 0$ 의 두 근이 모두 정수가 되도록 자연수 a의 값을 구하여라.

풀이 두 근을 b, c라 하면 주어진 이차방정식은

$$2(x-b)(x-c) = 2x^2 - 2(b+c)x + 2bc = 0$$

과 같아야 한다. 그럼

$$b + c = 3, \qquad 2bc = 1 + a$$

a가 자연수이므로 $1 + a \geq 2$ 이고, 따라서 $bc \geq 1$ 도 자연수이다. 즉, b와 c가 같은 부호. $b + c = 3$ 에서 이를 만족하는 경우는 $\{b, c\} = \{1, 2\}$ 밖에 없다. 따라서, $a = 2bc - 1 = 3 \quad \cdots$ **답** ♢

유제 이차방정식 $x^2 + (m+1)x + 2m - 1 = 0$ 의 두 개의 근이 정수가 되기 위한 정수 m의 값을 정하여라.

기본문제 2.3.2

$a^2+b^2+c^2=2abc$ 의 양의 정수해를 모두 구하여라.

풀이 우변이 짝수이므로 좌변에서 a, b, c가 모두 홀수일 수는 없다. a, b, c 중에 짝수가 있으므로 이번에는 우변이 4의 배수. 홀수의 제곱수는 4로 나눈 나머지가 1, 짝수의 제곱수는 0이 됨을 이용해 좌변을 mod 4로 생각하면, 세 개의 제곱수의 합이 4의 배수가 되는 경우는 모두 짝수일 때뿐이다.
a, b, c가 모두 자연수이므로 이들을 소인수분해했을 때의 2의 지수가 가장 작은 것이 있다. 즉, $a=2^mA$, $b=2^mB$, $c=2^mC$ 이고 A, B, C 중에 홀수가 있도록 하는 $m\geq 0$ 이 존재한다. 앞에서 a, b, c가 모두 짝수임을 보였으므로 실은 $m\geq 1$. 이제 이를 대입하여 양변을 2^{2m}으로 나누면

$$A^2+B^2+C^2=2^{m+1}ABC$$

가 된다. 우변이 4의 배수이므로 좌변도 4의 배수. 앞에서 했던 mod 4로 생각하기를 다시 해보면 역시 A, B, C가 모두 짝수라고 나오고, 이것은 모순. 따라서, 양의 정수해는 없다. $\diamondsuit$

유제 $a^2+b^2+c^2+d^2=2abcd$ 의 양의 정수해가 없음을 보여라.

연습문제 2.3.1

$17p+1$ 이 완전제곱수가 되는 소수 p를 모두 구하여라.

연습문제 2.3.2

앞의 세자리와 뒤의 세자리를 맞바꾸면 6배로 증가하는 여섯 자리수를 구하여라.

연습문제 2.3.3

$6 \mid a+b+c$ 와 $6 \mid a^3+b^3+c^3$ 이 동치임을 보여라.

연습문제 2.3.4

다음은 홀수와 이진법의 수의 대응을 나타낸 것이다. 이 때, x로 적당한 수는?

1	3	5	7	$\cdots$	x	$\cdots$
$11_{(2)}$	$1000_{(2)}$	$1101_{(2)}$	$10010_{(2)}$	$\cdots$	$110101_{(2)}$	$\cdots$

연습문제 2.3.5

어떤 네 자리수 N은 완전제곱수이고 각 자리수가 7보다 작다고 한다. 그리고 각 자리수를 3씩 증가시킨 수도 다시 완전제곱수가 된다고 한다. N은 얼마인가?

연습문제 2.3.6

m이 임의의 양의 정수일 때, $m+n+1$ 이 완전제곱수이고 $mn+1$ 이 완전세제곱수인 양의 정수 n을 항상 찾을 수 있음을 보여라.

연습문제 2.3.7

(1899년 헝가리 Eötvös 경시대회) 임의의 자연수 n에 대해 다음 식이 1897로 나누어짐을 보여라.

$$A = 2903^n - 803^n - 464^n + 261^n$$

연습문제 2.3.8

(1999년 호주 수학올림피아드) 한 농부가 그의 세 아들에게 각각 $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$의 말을 상속한다는 유언을 남기고 죽었다. 하지만 그가 가진 말은 $(xyz-1)$마리로 x, y, z 등의 배수가 아니었다. 아들들은 이웃으로부터 말을 한 마리 빌려와서 유언에 따라 말을 잘 분배하였고, 남은 말 한 마리를 그 이웃에게 돌려주었다. 이 농부의 말은 모두 몇 마리였을까?

연습문제 2.3.9

(2002년 KMO) 방정식 $x^3+2y^3+4z^3+8xyz=0$ 의 정수해를 모두 구하여라.

연습문제 2.3.10

(2002년 KMO) 적당한 양의 정수 a에 대하여 다음의 세 조건을 모두 만족시키는 음이 아닌 정수들의 순서쌍 $(x_1, x_2, \ldots, x_{2002})$ 를 모두 구하여라.

(1) $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_{2002} \geq 0$

(2) $0 < x_1 + x_2 + \cdots + x_{2002} \leq a$

(3) $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2002}^2 + 3^2 = a^2$

연습문제 2.3.11 $a^2+b^2=c^2$ 일 때, $\gcd(a,b,c)=1$ 인 것과 a, b, c가 둘씩 모두 서로 소인 것이 동치임을 증명하여라.

연습문제 2.3.12 a, b가 둘다 홀수이고 $\gcd(a,b)=1$ 이면 $\gcd(\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2})=1$ 임을 증명하여라.

연습문제 2.3.13 $ab=c^2$ 이고 a와 b가 서로 소이면 a, b 모두 제곱수임을 증명하여라.

연습문제 2.3.14 $\gcd(a,b,c)=1$, $a^2+b^2=c^2$ 이고 a만 짝수일 때, $b^2=c^2-a^2$ 으로 넘겨

$$b^2=(c+a)(c-a)$$

로 풀면 $(c+a)$, $(c-a)$ 모두 완전제곱수임을 보여라.

연습문제 2.3.15 위 문제에서 $c+a=u^2$, $c-a=v^2$ 으로 하여 원시해 (a,b,c)를 정리하여라. 그리고, 이것과 앞의 정리에서 구한 결과가 동치임을 보여라.

도전문제 2.3.1

임의의 자연수 $x_1 > 1$ 에 대해, x_1이 2^t꼴이 아니면 다음을 만족하는 자연수 수열 $x_1, x_2, \dots, x_r$ 이 존재함을 보여라.

(a) $x_i^2 + x_{i+1}^2$ 은 모두 완전제곱수이다. $(i = 1, 2, \dots, r-1)$

(b) $p(x_1) \geq p(x_2) \geq \cdots \geq p(x_r) = 2.$

도전문제 2.3.2

$x^2 + y^2 + 1 = z^2$ 이 무한히 많은 정수해를 가짐을 보여라.

2.4 시간의 기수법

우리는 일상 생활에서 10진법을 쓰고, 컴퓨터는 그 내부에서 2진법을 사용하고, 각도법은 한 바퀴를 360등분하여 읽습니다. 이런 정도가 우리가 수를 익숙하게 표현하는 방법들의 전부일까요? 매우 익숙하게 사용하면서도, 그것이 수를 표현하는 멋진 방법들이라는 것을 잘 깨닫지 못하고 있는 많은 것들이 우리가 시간을 표현하는 관습 속에 숨어 있답니다. 이번 호에서는 바로 이런 것들을 찾아내 살펴보고자 합니다.

■ 시간의 복합진법

17시 36분에서 50분이 지난 시각은 18시 26분입니다. 여기서 다시 10시간이 흐르고 나면 다음 날 새벽 4시 26분이 되지요. 분이나 초는 60을 세면 다시 0이 되는 60진법을 사용하지만 그 윗 자리인 시는 24진법을 사용합니다. 즉, 60진법과 24진법이 섞여 사용되는 복합진법인 셈이지요. 24시간은 다시 오전과 오후로 나뉘어 12진법과 2진법(오전이 0이고 오후가 1인 셈이죠)의 복합진법으로 이루어지기도 합니다. 이 앞에 요일을 덧붙인다면 그것은 7진법이 되겠죠? 월화수목금토일 중에 어느 것이 0일까요? 무엇이 0이 되든 그것은 상관없을까요?

이렇게 복잡한 기수법을 사용하고 있는데, 우리는 아무 것도 아닌 듯이 이런 시스템 속에서 시간을 말하며 살고 있군요. 기대했던 것보다 우리가 너무 똑똑하기 때문일까요? 그게 아니라, 아마도 이런 기수법을 가지고 계산할 일이 별로 없기 때문일 것입니다. 예를 들면 다음 예제와 같이 말이죠.

예제 1

지금은 금요일 17시 36분이다. 앞으로 5841분 후의 시각을 계산하여라.

풀이 $5841 \div 60 = 97 \ldots 21$ 이므로 5841분은 97시간 21분이다. 97시간은 다시 $97 \div 24 = 4 \ldots 1$ 이므로 4일 1시간과 같다. 금요일 17시 36분으로부터 4일 1시간 21분 후는 다음 주 화요일 18시 57분이다. ♢

별로 익숙하지 않겠지만, 다음과 같은 복합진법도 위 시간에 대한 예제를 바탕으로 계산해 볼 수 있겠죠?

예제 2

어떤 별에서는 하루가 8시간, 1시간이 12분, 1분이 20초라고 한다. 이 별에서의 시각 3시 11분 13초로부터 278초 후의 시각을 계산하여라.

위 시간에서 요일을 대신해 년, 월, 일 등을 생각한다면 어떨까요? 일은 30진법이고 월은 12진법입니까? 꼭 들어맞는 것은 아니죠? 어느 달이냐에 따라 일은 30진법이 되기도 하고 31진법이 되기도 하고, 또 2월에는 특이하게 28진법이나 29진법이 섞여 사용됩니다. 이것은 어느 해이냐에 따라 그 윤년의 기준으로 달라지는 것이죠. 사람들은 왜 이렇게 복잡한 기수법을 사용하는 것일까요?

만일 1년을 364일로 정하면 $364 = 7 \times 52$ 이므로 1년은 52주, 이것은 트럼프 카드의 수와 같습니다. 그럼 1년을 ♠, ♢, ♡, ♣의 네 철로 구분하고 각 철마다 $A, 2, 3, \ldots, Q, K$의 13주가 있도록 구분하면 매우 수학적인 달력이 될 수 있지 않을까요? 혹은 13번의 달마다 정확히 4주씩 있도록 해도 좋겠군요. 1년 중 하루나 이틀 정도를 조커(joker)의 날로 한다면 $365.24\cdots$를 지킬 수도 있지 않을까요?

■ 유사진법

이번에는 복합진법을 더욱 발전시켜 어떤 규칙에 의해 각 자리의 진법이 변화해 가는 경우를 생각해 보도록 합시다. 이야기가 너무 어려워보이나요? 다음 보기를 살펴보면서 이해해 봅시다.

보기 3

1부터 n까지 더한 수를 $s(n)$이라 하자. 그럼 처음 몇 항은 다음과 같다.

$$\begin{array}{ccccccccc} n & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \\ s(n) & : & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & 21 & 28 & \ldots \end{array}$$

자연수 x가 $s(n) \le x < s(n+1)$의 범위에 있을 때 $r = x - s(n)$이라 하고, x를 새로운 기수법 $(n : r)$로 표현하기로 하자. 그럼 $x = s(n) + r$이 되고, 처음 10개의 자연수는 다음과 같이 표현될 것이다.

$$(1:0)\ (1:1)\ (2:0)\ (2:1)\ (2:2)\ (3:0)\ (3:1)\ (3:2)\ (3:3)\ (4:0)\ \ldots$$

이 때, 25를 이 기수법으로 표현하여라. 그리고 $(8:3) + 29$를 구하여 이 기수법으로 표현하여라.

풀이 (1) 먼저

$$s(6) = 1+2+3+4+5+6 = 21, \quad s(7) = s(6) + 7 = 28$$

이므로 $s(6) \le 25 < s(7)$ 이다. $25 - s(6) = 4$ 이므로, 위의 기수법으로 $25 = (6 : 4)$이다.

(2)
$$\begin{aligned}(8:3)+29 &= [(1+2+\cdots+8)+3]+29 = s(8)+32 \\ &= s(8)+9+10+11+2 = s(11)+2 = (11:2)\end{aligned}$$

이다. ♢

위 예제의 기수법은 십의 자리수가 커짐에 따라 일의 자리수가 취할 수 있는 범위도 점점 커진다는 특징이 있습니다. 따라서 계산이 깨끗하지 못하고 많은 작업을 필요로 합니다. 하지만 수를 표현하는 좋은 방법이라는 것은 틀림없겠죠?

$n = 0$일 때 $s(n) = 0$으로, 즉 $0 = (0 : 0)$으로 한다면, 위의 수 표현은 다음과 같은 삼각형 꼴의 배열에서 좌표를 읽은 것이라고 볼 수도 있습니다.

$$\begin{array}{llll} 0 & & & \\ 1 & 2 & & \\ 3 & 4 & 5 & \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ \vdots & & & \ddots \end{array} \qquad \begin{array}{llll} (0:0) & & & \\ (1:0) & (1:1) & & \\ (2:0) & (2:1) & (2:2) & \\ (3:0) & (3:1) & (3:2) & (3:3) \\ \vdots & & & \ddots \end{array}$$

예제 4

위 예제의 기수법에 따라 다음을 풀어라.

(1) 37을 이 기수법으로 표현하여라.

(2) $(10:1)+(5:4)$를 계산하여 이 기수법으로 표현하여라.

이런 유사진법의 예를 한 가지만 더 살펴볼까요?

예제 5

1부터 n까지 곱한 수를 n!이라 하자. 그럼 처음 몇 항은 다음과 같다.

$$\begin{array}{ccccccccccc} n & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots \\ n! & : & 1 & 2 & 6 & 24 & 120 & 720 & 5040 & \dots \end{array}$$

자연수 x가 $n! \le x < (n+1)!$의 범위에 있을 때 $k \cdot n! \le x < (k+1) \cdot n!$ 을 만족하는 자연수 k를 찾아 $r = x - k \cdot n!$이라 하고, x를 새로운 기수법 $[k:n:r]$로 표현하기로 하자. 예를 들어 $100 = 4 \times 4! + 4$ 이므로 $100 = [4:4:4]$가 된다. 300을 이 기수법으로 표현하여라. 그리고 $[2:3:5]+67$ 을 구하여 이 기수법으로 표현하여라.

풀이 (1) 먼저

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120, \quad 6! = 5! \times 6 = 720$$

이므로 $5! \le 300 < 6!$ 이다. $2 \cdot 5! \le 300 < 3 \cdot 5!$ 이므로 $k = 2$가 된다. 따라서 $300 = 2 \times 5! + 60 = [2:5:60]$이다.

(2) 먼저 이 값을 풀면

$$[2:3:5] + 67 = (2 \times 3! + 5) + 67 = 17 + 67 = 84$$

이므로, 이제 84를 이 기수법으로 표현해 주면 된다. 앞의 예들처럼 범위를 잘 찾아주면 $84 = 3 \times 4! + 12$ 임을 구할 수 있으므로, $84 = [3:4:12]$ 가 구하는 답이다. ♢

예제 6

위 예제의 기수법에 따라 다음을 풀어라.

(1) 1999를 이 기수법으로 표현하여라.

(2) $[2:7:33]+[4:6:123]$을 계산하여 이 기수법으로 표현하여라.

위 예제 5의 기수법이 예제 3의 기수법보다 훨씬 큰 수를 표현하는 데에 보다 적합하겠군요. 반면에 일의 자리에 무척 큰 수가 나타나기 쉬운 약점을 가지고 있습니다. 이 기수법을 좀더 효율적으로 개선하여 앞에서 서술했던 복합진법의 방식으로 나타낼 수 있는데, 그 개선된 기수법을 여러분이 한 번 찾아보시기 바랍니다. 도전문제에서 그 기수법을 소개하도록 하겠습니다.

■ 잉여 연산

이번에는 자리올림을 하지 않는 수체계에 대해 생각해 봅시다. 23시를 지나 0시가 되면서 하루가 넘어갈 때, 그 요일이나 날짜가 바뀌는 것은 생각하지 말고 오직 시간이 어떻게 바뀌는지에만 관심을 두겠습니다. 12시간 체계를 사용하는 아날로그 시계를 읽는 법에 이미 익숙하므로, 24시간 대신 12시간 체계에 대해 시계 그림과 함께 생각해 보기로 합시다.

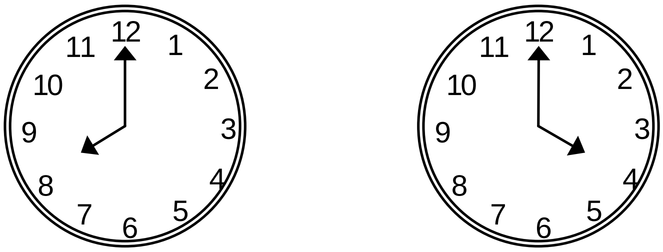
물음 7

지금 시각은 8시이다. 앞으로 8시간 후는 몇 시인가?

이 물음에 대해 어떻게 답을 구해낼까요? 여러 학생들의 대답을 한번 들어볼까요?

> "(송이, 손가락을 꼽아보며) 지금이 8시니까 9 10 11 12 1 2 3 4, 아 4시로구나."
>
> "(민보, 연필로 연습장에 계산하며) $8+8=16$이고 $16-12=4$이니까 4시가 되네."

"(장수, 시계 그림을 그리며) 8시에는 시침이 여기니까 8시간만큼 돌리면, 4시구나."



"(예지) 그건 여덟 시간이 지나고 나서 시계를 보면 알 수 있지. 하하."

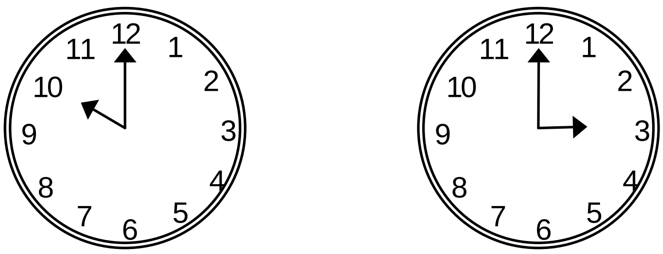
그럼 이런 물음에 대해서라면 어떨까요?

물음 8

지금이 10월이라면 앞으로 다섯 달 후는 몇 월인가?

"(예지) 그것도 앞으로 다섯 달이 지나서 달력을 보면... 아, 달력은 스스로 움직이지 않지. 뭐, 날짜까지 표시해주는 전자시계를 보면 되겠지... 헤헷."

"(장수) 시간도 12진법이고, 달력도 12진법이니까 달력을 시계처럼 그리면 보기 좋겠네. 10시에서 5시간만큼 돌리면 3시로구나."



"(모두들) 야아, 그렇군. 달력을 시계처럼 볼 수 있는 거구나."

그런데 왜 시간이나 월을 나타내는 숫자로 0–11을 쓰지 않고 1–12를 쓸까요? 그것은 차례를 매기는 습관때문이랍니다. 차례는 언제나 '첫 번째'부터 시작하지 '0번째'는 없잖아요. 그런데 사실 12시는 0시랑 같은 것이죠.

13시는 1시랑 같은 것이고, 15시는 3시랑 같은 것이고, 또 -7시는 5시랑 같은 시간이라고 볼 수 있습니다. 일반적으로 말한다면, a시랑 b시가 같다는 것은 두 수를 12로 나눈 나머지가 같다는 것이 되겠죠? 또는, $a-b$가 12의 배수가 된다고 해도 같은 말이 될 것입니다.

이것은 그러고보니 앞에서 공부했던 나머지에 대한 합동식 바로 그것이군요. 그럼 합동식을 이해할 때 시계그림을 떠올리며 이해할 수 있지 않을까요? 합동식의 성질 중에 다음과 같은 것이 있었습니다.

$$a \equiv b,\ c \equiv d \quad \text{이면} \quad ac \equiv bd$$

이것은 다음과 같은 예로써 음미해 봅시다. 어떤 시각에서 세 시간을 더하는 것이랑 15시간을 더하는 것은 시계에서 같은 시각을 가리키게 되죠? 그럼 세 시간씩 5번 가는 것이랑 15시간씩 5번 가는 것은 역시 같은 것이 되겠군요. 즉, $3 \equiv 15$이기때문에 $3 \cdot 5 \equiv 15 \cdot 5$ 가 되는 것입니다. 또, 15시간씩 12번을 가는 것은 12시간씩 15번을 가는 것이나 다름 없고, 그럼 그것은 시계를 전혀 움직이지 않은 것이 되겠죠? 그래서 15시간씩 5번 가는 것과 15시간씩 17번 가는 것은 같은 것이 될 것입니다. 즉, $5 \equiv 17$이기때문에 $15 \cdot 5 \equiv 15 \cdot 17$ 이 되는 것이죠. 결국 세 시간이 흐르는 것과 15시간이 흐르는 것이 같고($3 \equiv 15$), 5번 가는 것과 17번 가는 것이 같으므로($5 \equiv 17$), 세 시간씩 5번 가는 것과 15시간씩 17번 가는 것이 같게 되지요($3 \cdot 5 \equiv 15 \cdot 17$).

예제 9

37×27시는 몇 시인가?

풀이 $37 \equiv 1 \pmod{12}$, $27 \equiv 3 \pmod{12}$ 이므로 $37 \cdot 27 \equiv 1 \cdot 3 = 3 \pmod{12}$ 가 된다. 따라서 이는 3시이다. ♢

예제 10

38^{27}시는 몇 시인가?

풀이 우선 $38^{27} \equiv 2^{27}$이다. $2^4 = 16 \equiv 4 = 2^2$ 이므로, $2^{27} = 2^4 \cdot 2^{23} \equiv 2^2 \cdot 2^{23} = 2^{25}$ 이 된다. 이런 과정을 계속 하면 $2^{25} \equiv 2^{23} \equiv \cdots \equiv 2^3 = 8$ 이 된다. 따라서 38^{27}시는 8시와 같다. ◇

■ 0을 사용하지 않는 진법

시계나 달력의 날짜가 0부터 시작하지 않고 1부터 시작하는 것은 개수(양)가 아닌 순서로 받아들였기 때문입니다. 1999년이 된 직후 5분이 지난 시각은 1999년 0월 0일 0시 5분으로 표현하지 않고 1월 1일 0시 5분이라고 말합니다. 이것은 한 달과 하루와 0시간과 5분이 지났음을 의미하는 것이 아니라, 첫째 달 첫째 날의 0시 5분이라는 것이지요. 양(개수)과 순서의 차이를 알겠지요?

1985년 2월 11일에 태어난 아이가 1999년 10월 4일에 몇 살이냐고 물으면, 서양식으로는 아마 '만 14년 7개월 23일'이라고 얘기할 수 있을 것입니다. 하지만 우리 나라 사람들이 보통 일컫는 나이로는 15살이지요. 어머니 뱃속의 태아까지 감안한 나이라는 말도 있지만, 사실은 순서를 반영한 것입니다. 1985년에는 태어난 '첫' 해니까 '한' 살, 1986년에는 '두' 번째 해니까 '두' 살, 이런 식으로 해서 1999년에는 1985년으로부터 15번째 해를 살고 있으니까 열 다섯 살인 것입니다.

서기는 예수님의 탄생을 근거로 한 것인데, 그럼 1999년 12월 25일에 예수님이 살아있다면 몇 살일까요? 만 1999살일까요? 그게 아니고, 그냥 우리 나이의 방식으로 1999살입니다. 만으로는 1998살이지요. 예수님이 태어난 (첫) 해를 서기 '1'년으로 했거든요. 0년으로 했으면 만 나이와 일관성이 있었을텐데, 그러고보니 서양 사람들도 우리와 같은 나이 체계를 사용한 경우가 있는 것이군요.

서기 1년의 바로 전 해는 몇 년일까요? 0년? 아니, 기원전 1년입니다. -1의 다음에 0이 오지 않고 바로 1이 오는 꼴이죠. 이때문에 예를 들어 '기원전 31년의 174년 후가 몇 년일까'라고 물었을 때, 단순히 $-31 + 174 = 143$이니까 서기 143년이라고 생각하면 1년만큼의 오류가 생긴답니다. 사실은 서기 144년이죠.

이렇게 차례와 양을 혼용하여 시간을 나타내었기 때문에 생기는 미묘한 상황이 종

종 생긴답니다. 한 세기를 100년으로 하는데, 제 1세기를 서기가 시작된 첫 100년으로 하니 서기 1년부터 100년까지이고, 제 2세기는 101년부터 200년까지, 그리고 20세기는 1901년부터 2000년까지입니다. 그러니 원칙적으로는 새로운 밀레니엄의 시작이 2000년이 아니고 2001년 1월 1일이어야 하죠. 하지만 1999라는 수에서 2000이라는 수로 바뀌는 것은 얼마나 극적인 일입니까? 처음부터 서기 1년 대신 0년으로부터 출발했더라면 좋았을 걸 그랬죠?

지금부터는 차례에 근거한 멋진 기수법 하나를 소개하려고 합니다. 숫자 대신 세 문자 A, B, C를 가지고 자연수를 만들어 봅시다. 우선 A, B, C를 차례로 1, 2, 3이라고 하면 처음 세 수는 만들 수 있겠군요. 그 다음 수부터는 어떻게 표현할까요?

$$A,\ B,\ C,\ AA,\ AB,\ AC,\ BA,\ BB,\ BC,\ CA,\ CB,\ CC,\ AAA,\ AAB,\ \ldots$$

이런 식으로 쓰면 자연스럽겠죠? 문자 수를 늘려가면서 사전식 순서로 쓰는 것입니다. 그리고 차례로 자연수의 $1, 2, 3, 4, \ldots$ 라고 약속하면 이것도 세 문자에 의한 훌륭한 기수법이 된답니다. 세 문자를 사용하는 것이니 3진법과 관련이 있을 것 같죠? 그럼 한번 비교해 볼까요? 한 자리 수에서 두 자리 수로 넘어가는 것을 맞춰주기 위해 0부터 써봅시다.

A	B	C	AA	AB	AC	BA	BB	BC	CA	CB	CC	AAA	AAB	$\cdots$
0	1	2	10	11	12	20	21	22	100	101	102	110	111	$\cdots$

세 자리 수로 넘어갈 때 서로 맞지 않군요. 그러니 분명히 다른 기수법임을 알 수 있죠? A, B, C를 무작정 0, 1, 2로 바꾼 것으로 볼 수는 없습니다. AA가 00으로 바뀔테니 이것은 문제가 있죠. 자리수도 잘 안 맞고 있고요. 그럼 보통의 3진법과 전혀 관련이 없는 것일까요? 그렇지는 않답니다. 0부터 쓰지 말고 한 칸 씩 옮겨 1부터 써 봅시다. 원래 이 기수법은, '차례'를 나타내려는 표현이라고 느껴지므로 1부터 시작하는 게 맞을 것 같다는 느낌입니다.

A	B	C	AA	AB	AC	BA	BB	BC	CA	CB	CC	AAA	AAB	$\cdots$
1	2	10	11	12	20	21	22	100	101	102	110	111	112	$\cdots$

이제 여러분도 보이나요? A와 B가 각각 3진법의 1, 2라는 것은 분명해 보이네요. C가 포함되면 뭔가 조금 어긋나고 있고요. 도대체 그럼 C가 무엇일까요? 그것은

위의 표에 그대로 나타나 있듯이 바로 3진법의 10이랍니다. 예를 들어 AC는 A를 1로 하고 C를 10으로 하여 자리수를 잘 맞춰 더하니 20이 되는 것이죠. A, B, C에 의한 이 기수법은, 실은 0, 1, 2 대신 1, 2, 3을 가지고 표현한 3진법이랍니다.

A	B	C	AA	AB	AC	BA	BB	BC	CA	CB	CC	AAA	AAB	$\cdots$
1	2	3	11	12	13	21	22	23	31	32	33	111	112	$\cdots$
1	2	10	11	12	20	21	22	100	101	102	110	111	112	$\cdots$

이제 확실히 알겠죠? 이런 식으로 4진법, 5진법, 10진법 등도 모두 만들어집니다. 이런 기수법을 0 **없는 진법**이라고 합시다. 시간을 0–11시 대신 1–12시로 쓰는 것도 이와 같은 진법으로 볼 수 있습니다.

예제 11

서기 2000년을 0 없는 십진법으로 쓰면 몇 년이 되는가? 단, 10을 나타내는 숫자로는 A를 사용하기로 하자.

풀이 $2000 = 1A00 = 19A0 = 199A$ 가 된다. 즉 0 없는 십진법으로 서기 $199A$년이다. ◇

2001년도 0 없는 십진법에서는 $19A1$년일뿐이니 별로 극적인 수는 아닌 것같네요. 그럼 밀레니엄은 언제일까요? $1AAA$년에서 2111년으로 변할 때일 것입니다. 즉, 10진법으로 2110년에서 2111년으로 넘어갈 때가 되는군요. 이것은 어쩌면 더 의미 있는 밀레니엄일지도 모릅니다. 당장은 별 느낌의 차이가 없더라도, 숱한 세월이 흘러, 9999년에서 10000년으로 변하는 것과 AAAA년에서 11111년으로 변하는 것을 비교해 본다면, 과연 어느 것이 더 극적이겠습니까?

예제 12

0 없는 십진법으로 2111년의 바로 전 밀레니엄은 1111년(극적인!)이었다. 두 밀레니엄은 몇 년이나 차이가 나는가? 물론 그 차를 0 없는 십진법으로 표현하는 것을 원한다. 그리고나서, 이것을 보통의 십진법에서의 밀레니엄의 차와 비교해 보아라.

예제 13

0 없는 십진법에서의 다음 계산을 하여라.

(1) $359A4 + A1234 =$

(2) $194 \times 3A5 =$

0 없는 기수법이 가능하다는 것을 보았습니다. 여러분 스스로 0 없는 기수법과 보통의 기수법의 차이점을 더 찾아보고 싶지 않나요? 그리고 0 없이도 수를 표현할 수 있다면, 0의 발명은 소문으로 듣던 것보다 그리 대단한 것은 아니었던 걸까요?

도전문제 2.4.1

1의 자리에서 a_0진법, 10의 자리에서 a_1진법, ..., 10^n의 자리에서 a_n진법을 사용하는 복합진법을 사용할 때, $n+1$자리 이하의 수로 나타낼 수 없는 가장 작은 자연수는 얼마인가?

도전문제 2.4.2

임의의 n에 대해 $n-1$자리 이하의 수로 나타낼 수 없는 가장 작은 수가 항상 $n!$이 되도록 하려면 $a_0, a_1, a_2, \ldots$를 어떻게 정해야 할까? (주: 이것은 앞의 예제 5의 유사진법보다 효율적인 표현이다.)

도전문제 2.4.3

1.705를 0 없는 십진법에서 어떻게 표현할 수 있을까? 0과 1.04는 0 없는 십진법에서 어떻게 표현할 수 있을까?

도전문제 2.4.4

(1) $i = 1, 2, 3, \ldots$ 에 대하여

$$P_i = \left\{ x \,\middle|\, \frac{i(i-1)}{2} < x \leq \frac{i(i+1)}{2},\ x\text{는 자연수} \right\}$$

라 할 때, $i \neq j$ 이면 $P_i \cap P_j = \emptyset$(공집합) 임을 밝혀라.

(2) 자연수의 순서쌍에서 정의되고, 자연수의 값을 가지는 함수 f가

$$f(m,n) = \frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1) + m$$

으로 정의되어 있다. $f(m,n) = f(p,q)$ 이면 $m = p$, $n = q$ 임을 밝혀라.

제 3 장

방정식과 부등식

3.1 $n!$의 소인수분해

가우스 함수에 대해서 배웠던 것을 기억하나요? 여기서는 $n!$을 소인수분해하였을 때 이 가우스 함수가 활용되는 사례를 공부해보겠습니다.

보기 1

9!을 소인수분해하여라.

풀이 $9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 2^1 3^1 2^2 5^1 (2^1 3^1) 7^1 2^3 3^2 = 2^7 3^4 5^1 7^1$ ♢

$n!$을 소인수분해하려면 위와 같이 $1, 2, 3, \dots, n$ 등 모든 수를 소인수분해한 다음 같은 소수에 대한 항끼리 모아주면 됩니다. 그런데, n의 숫자가 커지면 이 작업은 매우 큰 작업일뿐만 아니라 그 불규칙성 때문에 무척 실수하기 쉬운 작업이 될 것입니다. 이를 보다 조직화하고 특히 특정한 소수의 지수만을 빨리 얻어내고자 할 때 큰 도움이 되는 방법이 있습니다. 여기에는 다음과 같은 가우스 함수의 성질이 힘을 발휘합니다.

정리

1에서 n까지의 수 중 k의 배수인 것들의 개수는 $\left[\dfrac{n}{k}\right]$ 이다.

예제 2

100!을 2로 계속 나눌 수 있는 횟수를 구하여라. 즉, $100! = 2^a 3^b 5^c 7^d \cdots$ 라고 할 때, a를 구하여라.

관찰 100!은 1부터 $2, 3, \dots, 100$까지의 모든 수를 곱한 것이다. 이 중에서 짝수들만 100!의 2의 지수 a에 영향을 끼칠 것이다. 그렇다고 단순히 짝수의 개수가 그대로 a가 되지는 않는다. 2나 6 등은 2의 지수를 1씩만 증가시키지만, 4는 2를, 8은 3을 증가시키기 때문이다.

정확히 생각하면, $4(=2^2)$의 배수가 아닌 2의 배수들이 a를 1 증가시키고, $8(=2^3)$의 배수가 아닌 4의 배수들이 a를 2 증가시키고, 2^4의 배수가 아닌 2^3의 배수들이 a를 3 증가시키고, ..., 이런 식일 것이다. 따라서,

$$\begin{aligned} a &= 1\cdot\left(\left[\frac{100}{2^1}\right]-\left[\frac{100}{2^2}\right]\right)+2\cdot\left(\left[\frac{100}{2^2}\right]-\left[\frac{100}{2^3}\right]\right) \\ &\quad +3\cdot\left(\left[\frac{100}{2^3}\right]-\left[\frac{100}{2^4}\right]\right)+\cdots \\ &= 1\cdot\left[\frac{100}{2^1}\right]+(2-1)\cdot\left[\frac{100}{2^2}\right]+(3-2)\cdot\left[\frac{100}{2^3}\right]+\cdots \\ &= \left[\frac{100}{2^1}\right]+\left[\frac{100}{2^2}\right]+\left[\frac{100}{2^3}\right]+\cdots \end{aligned}$$

와 같이 계산될 수 있다. 그런데, 이 계산의 결과를 보니 이것은 1에서 100까지의 2^1의 배수의 개수, 2^2의 배수의 개수, 2^3의 배수의 개수, ..., 를 그냥 모두 더한 것이 되었다. 이것은 우연일까 아니면 여기에는 어떤 원리가 숨어있는 것일까?

풀이 $1, 2, \ldots, 100$에 들어있는 2의 지수를 다음과 같이 세어보자. 먼저 2의 배수를 모두 센다($[100/2^1]$). 그럼 4의 배수가 아닌 수들은 이미 세어졌으므로 더 이상 셀 필요가 없이 버려지고, 아직 2의 지수가 다 세어지지 못한 것은 4의 배수들뿐이다. 그럼 4의 배수들을 한 번씩 더 세어주자($[100/2^2]$). 그럼 8의 배수가 아닌 수들은 이미 2번씩 세어졌으므로 더 이상 셀 필요가 없어진다. 아직 2의 지수가 다 세어지지 못한 것은 8의 배수들뿐이다. 그럼 8의 배수들을 한 번씩 더 세어주자($[100/2^3]$). 그럼 더 세어야 할 것은 16의 배수들만 남는다. ... 이렇게 계속하면 구하는 지수는

$$a=\left[\frac{100}{2^1}\right]+\left[\frac{100}{2^2}\right]+\left[\frac{100}{2^3}\right]+\cdots$$

로 계산된다. $\cdots$ **답** $a=50+25+12+6+3+1=97$ ♢

이 내용을 다음과 같이 정리할 수 있습니다.

정리

$n!$을 소인수분해하였을 때, 한 소인수 p의 지수부를 $f(p,n)$이라고 하자. 그럼

$$f(p,n) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \cdots$$

로 구할 수 있다. 단, 이 합은 무한히 계속될 필요는 없고, 분모 p^k이 n을 넘지 않을 때까지만 하면 된다.

처음 보기의 9!의 소인수분해를 이 방법으로 다시 하여 한번 검증을 해봅시다. 1에서 9까지에 있는 소수는 2, 3, 5, 7이 전부입니다. $9! = 2^a3^b5^c7^d$ 이라 하면,

$$\begin{aligned}
a &= f(2,9) = \left[\frac{9}{2}\right] + \left[\frac{9}{2^2}\right] + \left[\frac{9}{2^3}\right] = 4 + 2 + 1 = 7 \\
b &= f(3,9) = \left[\frac{9}{3}\right] + \left[\frac{9}{3^2}\right] = 3 + 1 = 4 \\
c &= f(5,9) = \left[\frac{9}{5}\right] = 1 \\
d &= f(7,9) = \left[\frac{9}{7}\right] = 1
\end{aligned}$$

로 처음 보았던 것과 틀림이 없음을 확인할 수 있습니다.

예제 3

20!을 소인수분해하여라.

예제 4

2000!을 소인수분해하였을 때 7의 지수부는 얼마인가?

기본문제 3.1.1

1004!을 $a \times 10^n$인 꼴로 나타낼 때, n을 구하여라. 단, a는 1의 자리 숫자가 0이 아닌 자연수이다.

풀이 $10^n = 2^n 5^n$ 이다. 즉, 1004!의 10의 지수부는 $1004! = 2^a 3^b 5^c 7^d \cdots$ 이라 할 때 2^a과 5^c에 의해 결정된다. a와 c 중 작은 수가 n이 되고 나머지는 10이 되지 못하고 남을 것이다. 그럼 a와 c 중에서 어느 것이 작을까? 아마도 5의 지수 c가 작을 것이다. 이것을 확실히 하고싶다면, $x \ge y$ 일 때 $[x] \ge [y]$ 라는 가우스 함수의 성질에 의해 $\left[\frac{n}{2^k}\right] \ge \left[\frac{n}{5^k}\right]$ 임이 각각의 k에 대해 성립하므로

$$\left[\frac{n}{2^1}\right] + \left[\frac{n}{2^2}\right] + \left[\frac{n}{2^3}\right] + \cdots \ge \left[\frac{n}{5^1}\right] + \left[\frac{n}{5^2}\right] + \left[\frac{n}{5^3}\right] + \cdots$$

의 대소 관계가 있음을 확인하면 된다.
이제 n을 구하면,

$$\begin{aligned} n &= \left[\frac{2000}{5^1}\right] + \left[\frac{2000}{5^2}\right] + \left[\frac{2000}{5^3}\right] + \cdots \\ &= 400 + 80 + 16 + 3 = 499 \end{aligned}$$

이다. ♢

유제 3042!을 8진법으로 표현하였을 때 마지막에 연속되는 0의 개수는 몇 개인가?

기본문제 3.1.2

다음 방정식의 정수해를 구하여라.

$$\left[\frac{x}{1!}\right] + \left[\frac{x}{2!}\right] + \cdots + \left[\frac{x}{2000!}\right] + \cdots = 1999$$

풀이 x가 1999보다 크면 첫 번째 항 $\left[\frac{x}{1!}\right]$에서 벌써 우변보다 커진다. 따라서 $x \le 1999$ 이다. $1999 < 7! = 5040$ 이므로, x는

$$x = a_6 \cdot 6! + a_5 \cdot 5! + a_4 \cdot 4! + a_3 \cdot 3! + a_2 \cdot 2! + a_1$$

로 표현할 수 있겠다. 단, $0 \le a_i \le i$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ 이다. 이것을 위의 방정식에 대입하면

$$\left(\frac{6!}{1!} + \frac{6!}{2!} + \cdots + \frac{6!}{6!}\right) a_6 + \left(\frac{5!}{1!} + \frac{5!}{2!} + \cdots + \frac{5!}{5!}\right) a_5 + \cdots + a_1 = 1999$$

즉,

$$1237a_6 + 206a_5 + 41a_4 + 10a_3 + 3a_2 + a_1 = 1999$$

이다. $a_6 = 0$ 또는 1이다.

(1) $a_6 = 0$일 경우: $206a_5 + 41a_4 + 10a_3 + 3a_2 + a_1 \le (206+41+10+3+1) \cdot 5 < 1999$ 으로 등식이 성립할 수 없다.

(2) $a_6 = 1$일 경우: $206a_5 + 41a_4 + 10a_3 + 3a_2 + a_1 = 762$ 을 풀면 된다. $41a_4 + 10a_3 + 3a_2 + a_1 \le 41 \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 = 201$ 이므로, $561 \le 206a_5 \le 762$ 이어야 한다. 따라서 $a_5 = 3$. 이와 같은 방법으로 계속 계산을 하면 $a_4 = 3$, $a_3 = 2$, $a_2 = 0$, $a_1 = 1$ 이 얻어진다. 따라서, 방정식의 해는 $x = 1 \cdot 6! + 3 \cdot 5! + 3 \cdot 4! + 2 \cdot 3! + 0 \cdot 2! + 1 = 1165$ 이다. ♢

유제 $\left[\frac{x}{1!}\right] + \left[\frac{x}{2!}\right] + \left[\frac{x}{3!}\right] + \left[\frac{x}{4!}\right] + \cdots + \left[\frac{x}{1001!}\right] + \cdots = 2002$ 의 정수해를 구하여라.

연습문제 3.1.1

2000!을 십진법으로 표현할 때 끝부분에 0이 몇 개나 있는가?

연습문제 3.1.2

100!을 12진수로 나타낼 때, 뒤에 달린 0은 몇 개인가?

연습문제 3.1.3

$\dfrac{(a+b)!}{a!\,b!}$이 자연수임을 증명하여라. 단, a, b는 음이 아닌 정수들이다.

연습문제 3.1.4

다음과 같은 수열이 있다.

$$\left[\frac{1^2}{2000}\right],\ \left[\frac{2^2}{2000}\right],\ \cdots,\ \left[\frac{2000^2}{2000}\right]$$

이 수들을 모두 모아 집합을 만들 때 이 집합의 원소의 개수는?

연습문제 3.1.5

$\left[\frac{x}{1!}\right]+\left[\frac{x}{2!}\right]+\left[\frac{x}{3!}\right]+\left[\frac{x}{4!}\right]=2000$ 의 정수해를 모두 구하여라.

연습문제 3.1.6

$2^{100} \mid n!$을 만족하는 n의 최소값을 구하여라.

연습문제 3.1.7

$\dfrac{(2m)!\,(2n)!}{m!\,n!\,(m+n)!}$ 이 정수임을 보여라.

연습문제 3.1.8

$1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot2001$ 을 9진법으로 나타냈을 때 끝의 0의 개수를 구하여라.

3.2 평균 부등식

■ 산술·기하·조화 평균

창영이가 사탕의 길이를 측정했더니 2.172 cm였습니다. 이 결과가 잘못된 것이 아닐까해서 사탕을 두 번 더 측정해 보았더니 그 결과는 각각 2.176과 2.171 cm였습니다. 어떤 것이 그 물체의 실제 길이일까요? 이런 경우에는 측정해서 얻은 값을 모두 더하여 그 값의 개수로 나누는 평균값을 사용하는 것이 보통이지요. 즉, 세 수치를 더한 값이 6.519이고 이것을 3으로 나누면 2.173 cm가 됩니다. 이 평균값을 **산술 평균**이라고 합니다.

물음 1

그렇다면 n 개의 수들에 대한 산술평균은 어떻게 나타낼 수 있을까?

n개의 수 $a_1, a_2, \ldots, a_n$의 산술 평균은

$$A = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

로 나타냅니다.

산술 평균 이외에 다른 평균이 존재한다는 것을 곧 알게 되겠지만, 우선 평균이라는 것이 무엇인지 알아봅시다. 위에서 사탕을 cm단위로 재어 측정하였는데, mm단위로 재어 보면 단위만 바뀔 뿐 전에 얻은 결과와 똑같음을 알 수 있습니다. 각 측정 결과에 10을 곱하고 평균 결과에도 10을 곱해야 합니다. 이것은 10을 곱하거나 또는 다른 어떤 수 t를 곱해도 성립해야 합니다. 어떤 자든지 측정에 사용될 수 있어야 하기 때문이지요. 만약 산술 평균이 평균으로서 합당하다면 그것은 다음과 같은 특성을 가져야 합니다. 각 a_i에 t를 곱하면 마지막 결과 A에도 t를 곱해야 합니다. 따라서,

$$tA = \frac{1}{n}(ta_1 + ta_2 + \cdots + ta_n)$$

이 됩니다. 위의 식의 양변을 t로 나누면 처음의 식을 얻을 수 있으므로 위의 식이 성립하지요. 이처럼 위와 같은 성질을 만족할 때 "**산술 평균은 동질이다**" 고 말합

니다. 실제로, 평균으로 사용되는 것은 모두 동질이어야 합니다.

평균의 보다 단순한 두 번째 성질은 다음과 같습니다. $a_1, a_2, \ldots, a_n$의 평균은 a_i들 중에서 가장 작은 것보다 더 작아서도 안 되고, 가장 큰 것보다 더 커서도 안 됩니다. 위에서 만일 평균값으로 2.177을 얻었다면 이것은 이치에 어긋나는 것이지요. 산술 평균은 이 두 번째 성질을 가지고 있습니다.

산술 평균이 바뀔 수 있는 명백한 방법이 하나 있답니다. 앞서 제시한 예에서, 만약 창영이가 2.172와 2.176보다 2.171을 훨씬 더 신중하게 측정하여 얻은 것이라면, 창영이는 아마 이 값에 더 비중을 두어야 한다고 생각하겠지요. 만약 이 마지막 측정 때 첫 번째 또는 두 번째의 경우보다 4배의 가중치를 두었다면, 처음 두 측정치 2.172와 2.176을 기록한 다음에 2.171을 4번 기록합니다. 이것을 모두 다 더해서 6으로 나누면 2.172를 얻을 수 있습니다. 마지막 측정 값을 한 번만 적는 것이 더 좋을 텐데, 여기서는 4를 곱하고 $1 + 1 + 4 = 6$ 으로 나누었다는 것을 기억해야 합니다. 이와 같은 평균을 **가중 산술 평균**이라고 합니다. 만약 a_1에 가중치 w_1을, a_2에 가중치 w_2를, 이런 식으로 계속하여, a_n에 가중치 w_n을 둔다면, 이 때 가중 산술 평균은

$$W = \frac{1}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}(w_1 a_1 + w_2 a_2 + \cdots + w_n a_n)$$

이 됩니다. 가중 산술 평균 역시 앞에서 말한 두 가지의 성질을 모두 가지고 있다는 사실을 증명하는 것은 비교적 간단합니다. 이 장에서 논의할 주제를 가중평균으로 모두 확장할 수 있지만, 여기서는 이것을 다루지는 않을 것입니다. 가중평균은 가중 산술 평균의 기본 아이디어에 어떤 것도 더함이 없이 그저 보다 더 복잡한 기호로만 되어 있을 뿐이기 때문이지요.

물음 2

다른 종류의 평균들에는 어떤 것들이 있을까?

다른 종류의 평균들에는 여러가지가 있을 수 있겠지만 그중에서도 가장 널리 쓰이는 것들중에 기하평균과 조화평균이 있습니다. 이제 그것들에 대해서 알아봅시다.

기하평균을 알아보기위해 다음의 예를 살펴 봅시다.

보기 3

양팔저울의 한 쪽 접시 위에 물건을 올려 놓고 다른 쪽 접시 위의 추의 무게로 균형을 맞춘다. 균형이 정확하게 맞춰지지 않거나 깨지면 양쪽 저울대의 길이에 약간의 차이가 생기고, 이것으로 인해 그 물건의 계량이 부정확해진다. 저울대의 길이를 정확히 측정하는 것은 대체적으로 불가능하므로, 두 차례에 걸쳐 계량을 시행한다고 하자. 한 번은 왼쪽 접시에 물건을 놓고, 다른 한 번은 오른쪽 접시에 그 물건을 놓는다. 두 계량의 결과가 a_1, a_2라면 어떤 것을 진짜 무게로 해야 할까?

이 질문에 답을 해 봅시다. 왼쪽 저울대의 길이를 l, 오른쪽 저울대의 길이를 r이라 합시다. 이 길이는 측정할 수 없지만, 분명 어떤 길이를 가지고 있을 것입니다. 물리학의 기초적인 지식에 의하면 한 쪽 저울대의 길이와 무게의 곱은 다른 쪽 저울대의 길이와 무게의 곱과 일치합니다. 만약 w가 진짜 무게라면, 첫 번째 계량에 대하여 $wl = a_1r$, 두번째 계량에 대하여 $wr = a_2l$이 되지요. 두 방정식을 변끼리 곱하면 $wlwr = a_1ra_2l$이 됩니다. 양변을 lr로 나누면 $w^2 = a_1a_2$가 되고, 그 물건의 진짜 무게는 $w = \sqrt{a_1a_2}$가 되는 것입니다. 이것은 새로운 종류의 평균입니다. 이것을 a_1과 a_2의 **기하 평균**이라고 합니다.

산술평균과 마찬가지로 보다 여러 개의 수들이 있을 때 그들의 기하평균에 대해서 생각을 할 수 있습니다. 우선 이것을 모두 곱해서 $a_1a_2\cdots a_n$을 얻었다면, 이제 이 수에 제곱근을 취해야 할까요? 평균의 성질 중에서 **동질**이 있음을 기억해야 합니다. 각 a_i에 t를 곱하면, 이 곱은 $ta_1ta_2\cdots ta_n = t^na_1a_2\cdots a_n$ 이 됩니다. 이 때, $ta_1, ta_2, \dots, ta_n$의 기하 평균이 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 의 기하 평균에 t를 곱한 것이어야 하므로 그냥 제곱근이 아닌 n 제곱근이 되어야 합니다. 따라서, n개의 양수 $a_1, a_2, \dots, a_n$의 기하 평균은

$$G = \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

이 될 것입니다.

마지막으로 조화평균이라는 것을 알아보기로 할까요?

보기 4

갑과 을이 각각 4와 6의 속력으로 l만큼의 거리를 달린다. 이때 갑과 을의 평균 속력은 어떤 방법으로 구할 수 있을까?

갑이 달리는데 걸리는 시간은 $\frac{l}{4}$이고 을이 달리는데 걸리는 시간은 $\frac{l}{6}$이 되겠지요? 갑과 을이 달리는데 걸린 시간의 합은 $\frac{l}{4}+\frac{l}{6}$이 될것입니다. 갑과 을의 평균 속력을 구하려면 거리 l을 갑과 을이 평균적으로 걸린 시간으로 나누어 주면 됩니다. 그렇게 하면 두 사람의 평균속력은

$$\frac{l}{\frac{1}{2}\left(\frac{l}{4}+\frac{l}{6}\right)} = 4.8$$

이 되지요. 이 때, 이 평균속력을 구하는 방법이 바로 두 수의 조화평균을 구하는 방법이랍니다.

0이 아닌 두 수 a와 b가 있을 때 $\frac{2ab}{a+b}$를 a와 b의 **조화평균**이라고 합니다.

산술평균, 기하평균과 마찬가지로 0이 아닌 여러개의 수들에 대해 조화평균을 생각할 수 있습니다. 이는 다음과 같이 나타냅니다.

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

그럼 앞에서 배운 내용을 토대로 아래 예제를 풀어봅시다.

예제 5

(1) 하루에 갑은 3개의 빵을 을은 5개의 빵을 먹는다고 하면, 두 사람은 하루에 평균 몇 개의 빵을 먹는 것인가?

(2) 한 시간 동안 미생물 A는 2배씩 미생물 B는 8배씩 번식한다고 할 때, 이들의 평균번식률은 얼마라고 할 수 있는가?

(3) 어떤 일을 마치는데 갑은 3시간 을은 2시간 걸린다고 할 때, 두 사람은 평균적으로 몇 시간 걸린다고 할 수 있는가?

힌트 (1) 산술평균 (2) 기하평균 (3) 조화평균

■ 산술·기하·조화 부등식

앞에서 배운 산술, 기하, 조화 평균들의 사이에는 특별한 크기관계가 있습니다. 바로 그것을 나타낸 것이 바로 여기서 배울 내용이지요. 아래의 정리를 한번 살펴볼까요?

산술·기하·조화 부등식

양의 실수 a, b의 산술·기하·조화평균에 대해 다음과 같은 관계가 있다.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

단, 등호는 $a = b$일 때 성립한다.

이것이 **산술·기하·조화 부등식**이랍니다. 그런데 이 부등식이 항상 성립할까요? 그럼 이 부등식이 참이라는 아래의 증명을 보도록 합시다.

증명 1) (산술평균)≥(기하평균)

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

2) (기하평균)≥(조화평균)

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} &= \frac{\sqrt{ab}(a+b) - 2ab}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}(a+b-2\sqrt{ab})}{a+b} \\ &= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

□

이 증명은 부등식의 한쪽을 넘겨서 '0 이상이다'라는 것을 증명하는 식의 방법입니다. 위의 증명에 의해 항상 '산술·기하·조화 부등식'이 참이라는 것을 살펴 보았습니다.

다음의 예제를 살펴 봅시다.

예제 6

그럼 위의 부등식을 이용하여 $x + \frac{1}{x}$ $(x > 0)$ 의 최소값을 구하여라.

풀이 산술·기하 평균 관계에서

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \times \frac{1}{x}} = 1$$

이다. 즉, $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 임을 알 수 있다. 그런데 등호는 $x = \frac{1}{x}$ 일 때 성립하므로 $x = 1$일 때 최소값 2를 갖게 된다. ♢

■ 산술·기하·조화 부등식의 확장

앞에서 '산술·기하·조화 부등식'에 대하여 배웠습니다. 그런데 이들은 항상 a, b 두 개의 수가 있을때만 성립하는 것일까요?

산술·기하·조화 부등식은 두 개의 양의 실수에 대해서만 성립하는 것은 아닙니다. 임의의 n개의 실수 $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ 에 대해서 다음의 부등식이 성립합니다.

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

단, $a_1, a_2, \ldots, a_n$는 모두 양수이고, 등호는 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$일 때 성립합니다. 이들도 증명할 수 있지만 아직 증명할 수준이 아니므로 다음기회로 미루도록 하겠습니다.

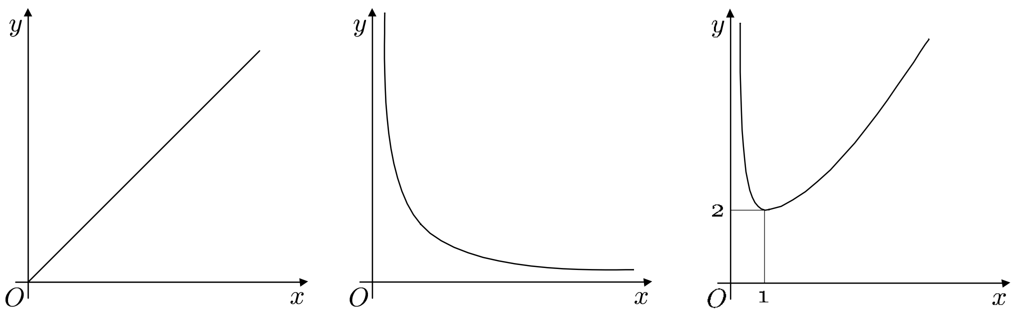
■ 산술·기하·조화 부등식과 함수, 그리고 그 응용

여기서는 위에서 배운 부등식이 어떻게 응용되어 사용되는지 알아보겠습니다.

예제 7

$y = x + \dfrac{1}{x}(x > 0)$의 그래프를 그려봅시다. 그리고 이를 이용해 최소값을 구해봅시다.

풀이 먼저 $y = x$의 그래프를 그리고 그 위에 $y = \dfrac{1}{x}$의 그래프를 그려봅니다. 그리고 이 두 그래프를 합한 그래프를 그리면 $y = x + \dfrac{1}{x}$의 그래프를 얻을 수 있게 됩니다.



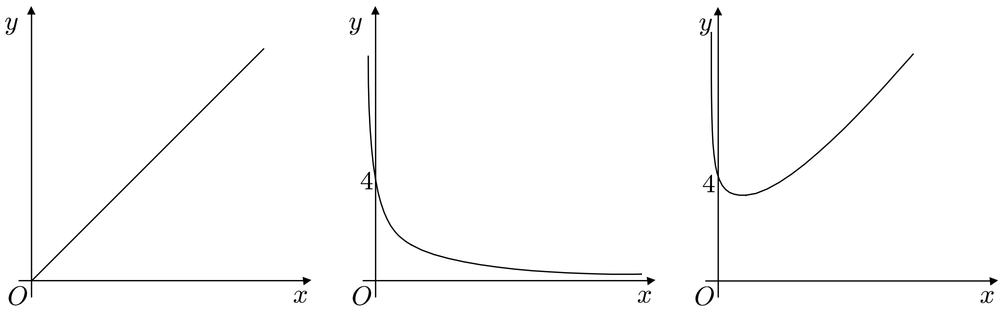
$(y = x)$ $(y = \frac{1}{x})$ $(y = x + \frac{1}{x})$

위의 그래프에서 대략 $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$라는 것을 예상할 수 있습니다. 그리고 산술·기하·조화 부등식을 이용하여 최소값은 $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$이고 등호는 $x = 1$일 때 성립한다는 것을 간단하게 증명할 수 있습니다. ♢

예제 8

이번에는 $y = x + \dfrac{4}{x+1}$의 그래프를 그려 보고 최소값을 예상해봅시다. 그리고 산술-기하 부등식으로 구한 값과 최소값과 비교해봅시다.

풀이 그래프는 아래와 같습니다.



$(y = x)$ $(y = \frac{4}{x+1})$ $(y = x + \frac{4}{x+1})$

그래프에서 최소값이 대충 3 정도라는 것을 예상할 수 있습니다. 산술-기하 부등식으로 한번 풀어보면,

$$x + \frac{4}{x+1} = (x+1) + \left(\frac{4}{x+1}\right) - 1 \geq 2\sqrt{(x+1) \times \frac{4}{(x+1)}} - 1 = 3$$

입니다. 등호가 성립하려면 $x + 1 = \dfrac{4}{x+1}$를 만족하는 x가 있어야 하겠지요? $x = 1$이면 $x + 1 = \dfrac{4}{x+1}$를 만족하므로, $x = 1$에서 최소값 3인 것을 알 수 있습니다. ♢

위의 경우와 같이 그래프만으로는 정확한 최소값을 구할 수는 없지만, 최소값이 어디 쯤에 있다라는 것을 추측할 수 있는 경우가 많고 그것이 아주 중요한 정보가 될 때가 있답니다. 따라서 어떤 식의 최대값 또는 최소값을 구하고자 할 때 그래프를 그려보는 것도 좋은 방법입니다.

기본문제 3.2.1

$a+b=8$ 일 때 ab의 최대값을 구하여라. (단, a, b는 양수이다.)

풀이 산술-기하 평균 부등식에서

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \quad ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 16$$

여기서 등호가 성립할 조건은 $a=b=4$ 일 때이다.
따라서, ab의 최대값은 $a=b=4$ 일 때 16이다. ♢

별해 $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = 64$ 에서 구한 $a^2+b^2 = 64-2ab$ 를 $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \geq 0$ (1)에 대입하자.

$$64 - 4ab \geq 0$$

따라서, $ab \leq 16$ 이고, 등호가 성립할 때는 (1)의 등호가 성립할 때인 $a=b$ 일 때, 즉 $a=b=4$ 일 때이다. 즉, 최대값은 16. ♢

유제 $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\right) \geq 4$ 를 증명하여라. (단, a, b, c, d는 모두 양수이다.)

기본문제 3.2.2

$a, b, c \geq 0$ 일 때 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{a+b+c}$ 이 성립함을 증명하여라.

풀이 산술-조화 평균 부등식에서 항 수가 3개일 때는 다음과 같다.

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}}$$

여기서 우변의 분모를 좌변으로, 그리고 좌변의 분자 분모를 우변으로 서로 이항하면

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

의 원하는 식이 성립함을 알 수 있다. 등호는 $a=b=c$ 일 때 성립한다. ♢

별해 항이 3개인 산술-조화 평균 부등식의 각 항에 $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$를 대입하자. 그럼

$$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}{3} \geq \frac{3}{1/\frac{1}{a}+1/\frac{1}{b}+1/\frac{1}{c}} = \frac{3}{a+b+c}$$

로 좌변의 3을 이항하면 원하는 부등식이 된다. ♢

유제 김씨와 이씨는 둘이 함께 잔디깎는 기계를 한 대씩 움직여 $10\,m^2$를 10분만에 깎을 수 있다. 박씨는 혼자 $10\,m^2$의 잔디를 20분만에 깎을 수 있다. 두 팀이 각각 $20\,m^2$의 잔디를 깎는 시합을 하는데, 김씨와 이씨의 팀은 먼저 김씨가 $10\,m^2$를 깎고 나서 이씨가 $10\,m^2$를 깎기로 했고, 박씨는 혼자 계속 $20\,m^2$를 깎는다. 그럼 어느 팀이 이길까? 단, 김씨와 이씨의 잔디 깎는 속도는 다르고, 각자는 일정한 속도로 잔디를 깎는다.

기본문제 3.2.3

둘레의 길이가 $2(\sqrt{2}+2)$인 직각삼각형의 넓이의 최대값을 구하여라.

풀이 빗변이 아닌 두 변의 길이를 a, b라 하자. 그럼 둘레의 길이 L은

$$L = a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$$

산술-기하평균 부등식에 의해

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$
$$\sqrt{a^2 + b^2} \geq \sqrt{2ab}$$

이므로 변변 더하면

$$(2 + \sqrt{2})\sqrt{ab} \leq L = 2(\sqrt{2} + 2), \qquad \text{즉} \qquad ab \leq 2^2 = 4$$

따라서, 직각삼각형의 넓이는 $S = \frac{1}{2}ab \leq 2$ 로 최대 2가 되고, 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립한다. ♢

유제 사면체 $PABC$에서 $\angle APB = \angle BPC = \angle CPA = 90°$ 이고 6개의 변의 길이의 합이 $6(\sqrt{2}+1)$일 때 부피의 최대값을 구하여라.

연습문제 3.2.1

주영이가 닭들을 키우기 위해 직사각형꼴의 닭집을 만들려고 한다. 닭집을 만들 재료인 철망은 길이가 총 $20\,m$ 라고 한다. 이것으로 만들 수 있는 닭집의 최대 크기는 얼마인가?

연습문제 3.2.2

$x-2+\dfrac{1}{x-5}$ $(x>5)$의 최소값을 구하여라.

연습문제 3.2.3

$x+3+\dfrac{1}{2x-2}$ $(x>1)$ 의 최소값을 구하여라.

연습문제 3.2.4

$a+nb \geq (n+1)\times \sqrt[n+1]{ab^n}$ (단, $a, b \geq 0$) 이 성립함을 증명하여라.

연습문제 3.2.5

$(a+b+c)(ab+bc+ca) \geq 9abc$ (단, $a, b, c \geq 0$) 이 성립함을 증명하여라.

연습문제 3.2.6

a, b, c, d는 양의 실수이고 $abcd = 1$ 을 만족한다. 이 때, 다음의 부등식을 증명하여라.

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geq 10$$

연습문제 3.2.7

a, b, c는 양의 실수이고 $(1+a)(1+b)(1+c) = 8$ 일 때 $abc \leq 1$ 임을 보여라.

연습문제 3.2.8

a, b는 $ab = 1$ 을 만족하는 양의 실수이고 k는 자연수이다. 이 때,

$$(k+a)(k+b) \geq (k+1)^2$$

임을 보여라.

연습문제 3.2.9

a, b, c는 $abc = 1$ 을 만족하는 양의 실수이고 k는 자연수이다. 이 때,

$$(k+a)(k+b)(k+c) \geq (k+1)^3$$

임을 보여라.

연습문제 3.2.10

a, b, c, d가 양수일 때 다음의 부등식을 증명하여라.

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geq \frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+d}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+d}+\frac{1}{c+d}$$

도전문제 3.2.1

반지름이 1인 원에 사다리꼴이 외접한다. 빗변을 제외한 두 평행한 변의 길이를 각각 a, b라 할 때 $a+b$와 ab의 최소값을 각각 구하여라.

도전문제 3.2.2

양수 x, y, z가

$$x^2+y^2+z^2=3$$

을 만족시킬 때

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$$

의 최소값을 구하여라.

3.3 재배열 부등식

■ 재배열 부등식

보기 1

(1) 10원, 50원, 100원, 500원 짜리 동전들이 있고, 12개의 동전을 가져갈 수 있다. 어떻게 가져가겠는가?
(2) 이번에는 각 종류별로 어떤 동전은 3개, 또 다른 동전은 4개, 또 다른 동전은 5개, 마지막으로 남은 동전은 6개로 묶어 가져갈 수 있다. 어떻게 가져가겠는가?

관찰 (1) 나라면 당연히 500원 짜리 12개를 가져가겠다.
(2) 나라면 500원 짜리 6개, 100원 짜리 5개, 50원 짜리 4개, 10원 짜리 3개를 가져가겠다.

즉, 가져가는 개수가 정해져 있다면, 작은 것보다는 큰 것을 더 많이 가져가는 편이 낫습니다. 이것을 수학적으로는 어떻게 표현할 수 있을까요? 10, 50, 100, 500의 수열이 있고, 또 3, 4, 5, 6의 수열이 있을 때, 이 두 수열을 한 항씩 대응시켜 곱한 것의 합이 언제 가장 클까 하는 문제가 됩니다. 크기 순서 대로 곱하는 것이 가장 좋으므로, 예를 들어

$$3 \cdot 10 + 4 \cdot 50 + 5 \cdot 100 + 6 \cdot 500 \geq 4 \cdot 10 + 6 \cdot 50 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 500$$

와 같은 부등식이 성립한다는 의미가 됩니다.

보기 2

$a^2 + b^2 \geq 2ab$ 를 증명하여라.

증명1 (완전제곱식)

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 \geq 0 \qquad \square$$

증명2 (산술-기하 평균 부등식의 관점에서)

$$\frac{(a^2)+(b^2)}{2} \geq \sqrt{(a^2)(b^2)} = |ab| \geq ab \qquad \square$$

증명3 **(드디어 재배열 부등식의 관점에서!)**

$$a \cdot a + b \cdot b \geq a \cdot b + b \cdot a$$

수열 a, b와 수열 a, b를 차례대로 곱한 것은 크기 순서대로(작은 것끼리, 그리고 큰 것끼리) 곱한 것이므로, 역순으로(작은 것에는 큰 것을, 큰 것에는 작은 것을) 곱한 우변보다 크다(크거나 같다). 등호는 $a = b$일 때 성립한다. □

예제 3

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ 를 증명하여라.

힌트 (1) 이항하여 2를 곱한 후 세 개의 완전제곱식의 합으로 정리할 수 있다.
(2) 위 보기와 같은 세 개의 산술-기하 평균 부등식을 합한다.
(3) **재배열 부등식**!

그럼 이제 재배열 부등식을 수학적으로 나타내고, 그것을 증명하겠습니다.

재배열 부등식 (항이 2개일 때)

$a \geq b$, 그리고 $c \geq d$ 일 때 다음의 부등식이 성립한다.

$$ac + bd \geq ad + bc$$

등호는 $a = b$ 혹은 $c = d$ 일 때 성립한다.

증명 이항하여 정리한다.

$$ac + bd - ad - bc = a(c-d) - b(c-d) = \underbrace{(a-b)}_{\geq 0}\underbrace{(c-d)}_{\geq 0} \geq 0 \qquad \square$$

재배열 부등식

$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ 이고 수열 $\{a'_k\}$, $\{b'_k\}$이 각각 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$의 재배열(항의 순서를 바꾼 수열)일 때, 다음 부등식이 성립한다.

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a'_1b'_1 + a'_2b'_2 + \cdots + a'_nb'_n \geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$$

즉, 큰 것끼리 곱하고 작은 것끼리 곱할 때가 양이 커진다.

(주) 왼쪽의 부등식은 지금까지 살펴왔던 것을 일반화한 식이지만, 오른쪽의 부등식은 좀 낯설게 느껴질지 모르겠다. 오른쪽 부등식은 크기 순서를 완전히 역으로 하여 곱했을 때 가장 작아진다는 의미이다. 즉, 맨 처음의 보기로 다시 설명하자면, 10원, 50원, 100원, 500원의 동전을 각각 6개, 5개, 4개, 3개씩 가져가면 가장 적은 액수를 가져가게 된다는 것이다. 부등식으로 표현하면

$$4 \cdot 10 + 6 \cdot 50 + 3 \cdot 100 + 5 \cdot 500 \geq 6 \cdot 10 + 5 \cdot 50 + 4 \cdot 100 + 3 \cdot 500$$

이와 같은 식이 된다.

(관찰) 일반성을 잃지 않고, 수열 $\{a'_k\}$은 $\{a_k\}$ 그대로, 재배열하지 않은 것이라 해도 된다. 즉, 두 수열의 곱

$$a'_1b'_1 + a'_2b'_2 + \cdots + a'_nb'_n$$

의 항들을 다시 잘 정렬하여

$$a_1b''_1 + a_2b''_2 + \cdots + a_nb''_n$$

로 $\{a_n\}$의 순서를 바로 잡아줄 수 있고, 이 때 다시 정렬된 수열 $\{b''_k\}$은 수열 $\{b'_k\}$의 재배열, 즉 여전히 수열 $\{b_k\}$의 재배열이다. 따라서 이제, $\{a'_k\}$를 다시 정렬하여 $\{a_k\}$로 쓰기로 하고, $\{b''_k\}$은 그냥 $\{b'_k\}$으로 쓰기로 하자.

증명 이제, 항이 2개일 때에 대해 증명한 앞의 정리의 증명 절차를 반복한다. 예를 들어,

$$a_1b'_1 + a_2b'_2 + \cdots + a_nb'_n$$

에서 만일 $b'_1 < b'_2$이라면, 앞의 정리에 의해

$$(a_1 b'_2 + a_2 b'_1) + \cdots + a_n b'_n \geq (a_1 b'_1 + a_2 b'_2) + \cdots + a_n b'_n$$

이 성립한다. 이제 수열 $b'_2, b'_1, \ldots, b'_n$ 을 다시 $b'_1, b'_2, \ldots, b'_n$ 이라고 이름 짓고, 또 혹시 $i < j$이면서 $b'_i < b'_j$인 경우가 없나 살핀다.

이런 방법으로 $\{b'_k\}$에서 두 항씩 두 항씩 순서를 바로잡으며 점점 값을 크게 하는 과정을 반복하면, 반드시 유한 번 만에 원하는 식

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

을 얻게 되고, 따라서 원하는 (왼쪽) 부등식을 얻었다.

오른쪽 부등식도 이와 같은 방법으로, 이번에는 $\{b'_k\}$의 순서를 완전히 역순으로 만들 수 있도록, $i < j$이면서 $b'_i > b'_j$인 경우를 발견할 때마다 그 둘을 바꾸어 주면 역시 유한 번 만에 원하는 부등식

$$a'_1 b'_1 + a'_2 b'_2 + \cdots + a'_n b'_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1$$

을 얻게 된다. □

위의 증명에서, 만일 '유한 번 만에 원하는 부등식이 나온다'는 것이 잘 납득이 되지 않으면, 다음과 같은 정렬 알고리즘을 생각합시다. 예를 들어 $4, 2, 3, 1$이라는 수열이 있고, 이를 오름차순으로 정렬하고 싶다면, 우선 다음과 같이 두 항씩을 차례로 비교하며 순서를 맞춥니다.

$$\underbrace{4,\ 2},\ 3,\ 1$$
$$2,\ \underbrace{4,\ 3},\ 1$$
$$2,\ 3,\ \underbrace{4,\ 1}$$
$$2,\ 3,\ 1,\ 4$$

이 과정에 의하면 가장 큰 4는 수열의 어디에 있었든지 항상 맨 뒤로 제자리를 찾아오게 됩니다. 그럼 이제 4는 제외시켜 놓고, 앞의 세 수에 대해서만 같은 방식으

로 다시 정렬합니다.

$$\begin{array}{l} \underbrace{2,\ 3,}\ 1,\quad 4 \\ 2,\ \underbrace{3,\ 1,}\quad 4 \\ 2,\ 1,\ 3,\quad 4 \end{array}$$

여기까지면 이제 3도 제자리를 찾았습니다. 그럼 이제 앞의 두 항에 대해 한 번만 비교해 주면 끝납니다.

$$\begin{array}{l} \underbrace{2,\ 1,}\quad 3,\ 4 \\ 1,\ 2,\quad 3,\ 4 \end{array}$$

이런 방식으로 항이 몇 개였든지 항상 유한 번만에 제 순서로 정렬해 줄 수 있습니다.

♡ 쉬어갑시다 ♡

이런 알고리즘을 **버블 정렬**(bubble sort)이라고 합니다. 정렬 알고리즘에는 이것 말고도 퀵 정렬(quick sort), 표본 정렬(sample sort) 등 버블 정렬보다 더 빠른 것들이 많습니다. 수학자들보다는 전산학자들에 의해 많이 개발되었습니다. 많은 시간과 많은 작업이 필요한 방대한 자료의 정렬에는 이런 보다 빠른 정렬 알고리즘이 쓰입니다. 하지만, 버블 정렬의 알고리즘이 가장 이해하기 쉽고 구현하기도 쉬우므로, OA 소프트웨어로 간단히 작업할 수 있는 요즘과 달리 성적처리 프로그램 등을 일일이 따로 만들던 1980년대에는 이 알고리즘이 많이 쓰였습니다. 지금도 컴퓨터 프로그래밍을 배우는 사람들에게 간단한 프로그래밍 연습으로 많이 쓰이고 있습니다. ♣

정의

재배열 부등식을 다루기 쉽도록 새로운 표기법을 도입하자.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

(주) 위의 정의는 국제 표준의 기호가 아니고 이 단원에서 재배열 부등식을 보다 효율적으로 익히기 위한 약속일 뿐이므로, 시험 등 다른 곳에서 사용하고 싶을 때는 먼저 이렇게 정의한다는 것을 약속한 후 사용하기 바란다.

이 알고리즘에 의해 재배열 부등식을 다시 표현한다면 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

정리 (재배열 부등식; 새 표기법)

$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ 이고 수열 $\{a'_k\}$, $\{b'_k\}$이 각각 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$의 재배열일 때, 다음 부등식이 성립한다.

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & \cdots & a'_n \\ b'_1 & b'_2 & \cdots & b'_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_1 \end{bmatrix}$$

보기 4

$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$ 를 증명하여라. 단, $a, b, c \geq 0$ 이다.

증명 위에서 정의한 표기법에 따라 다음과 같이 보면 재배열 부등식으로 증명된다는 것이 잘 보인다.

$$a^3 + b^3 + c^3 = \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b & c & a \end{bmatrix} = a^2 b + b^2 c + c^2 a \qquad \square$$

■ 체비셰프 부등식

이번에는 재배열 부등식의 응용으로서 체비셰프 부등식을 공부해 봅시다.

보기 5

다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$$

주 이것의 양변에 제곱근을 씌운 부등식

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$$

를 (제곱근 멱평균)-(산술 평균) 부등식이라고 한다.

증명1 (완전제곱식)
양변에 4를 곱하고 이항하여 정리하면 $(a-b)^2 \geq 0$ 꼴로 만들 수 있다. 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다. □

증명2 (코시-슈바르츠 부등식을 안다면)
양변에 4를 곱하면 다음의 코시-슈바르츠 부등식이 관찰된다.

$$(1^2+1^2)(a^2+b^2) \geq (1\cdot a + 1\cdot b)^2$$

등호는 $\frac{a}{1} = \frac{b}{1}$ 일 때 성립한다. □

관찰 **(드디어 재배열 부등식, 혹은 체비셰프 부등식의 관점에서!)**
이 부등식의 좌변과 우변의 의미를 재배열 부등식의 관점에서 가만히 음미해 보자. 좌변은 큰 것끼리 곱한 것과 작은 것끼리 곱한 것의 평균이다. 그리고 우변은 미리 평균을 내어 제곱했다. 평균은 두 항 a, b의 크기를 고르게 반영한 값이고, 그것을 제곱했다는 것은 고르게 잘 반영된 곱이라는 것이다. 확률적인 얘기로 하자면, $\{a,b\}$에서 아무렇게나 (중복을 허용하고) 두 수를 택해 곱할 때 나오는 결과의 기대값으로 볼 수 있다. 따라서, 크기 순서대로 잘 정렬해 곱한 것 a^2+b^2(의 평균)이 임의의 재배열곱 $aa'+bb'$(의 평균)보다 언제나 크므로, 그 재배열곱(의 평균)의 기대값 $(\frac{a+b}{2})(\frac{a+b}{2})$보다도 역시 크다는 것을 느낄 수 있다.
같은 관점에서

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq \frac{a\cdot b + b\cdot a}{2} (= ab)$$

의 부등식도 추측할 수 있다. 이것은 산술-기하 평균 부등식과 같으므로 별로 관심을 끌지 못하겠지만, 항이 보다 많아지면 또 새로운 부등식을 소개한 것이 될 수 있다.
이러한 것이 체비셰프 부등식의 관점이다.

증명3 재배열 부등식에서

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= a^2+b^2, \\ a^2+b^2 &\geq a\cdot b+b\cdot a \end{aligned}$$

와 같은 두 식을 생각할 수 있고, 이들을 변변 더하면

$$2(a^2+b^2) \geq (a+b)(a+b)$$

로 정리된다. 양변을 4로 나누면 준식과 같다. □

이 보기와 같은 부등식을 일반화하면 다음과 같은 부등식이 됩니다.

체비셰프(Chebyshev) 부등식

수열 $\{a_k\}$와 수열 $\{b_k\}$가 같은 순서로 정렬되어 있을 때(둘다 오름차순이거나 둘다 내림차순), 다음 부등식이 성립한다.

$$\frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{n} \geq \frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\cdot\frac{b_1+\cdots+b_n}{n} \geq \frac{a_1b_n+\cdots+a_nb_1}{n}$$

증명 재배열 부등식에 의해 다음 부등식들이 성립한다.

$$\begin{aligned} a_1b_1+\cdots+a_nb_n &= a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n, \\ a_1b_1+\cdots+a_nb_n &\geq a_1b_2+a_2b_3+\cdots+a_nb_1, \\ a_1b_1+\cdots+a_nb_n &\geq a_1b_3+a_2b_4+\cdots+a_nb_2, \\ \vdots \quad & \quad \vdots \quad \vdots \\ a_1b_1+\cdots+a_nb_n &\geq a_1b_n+a_2b_1+\cdots+a_nb_{n-1} \end{aligned}$$

이들을 모두 더하면 다음의 부등식이 된다.

$$n(a_1b_1+\cdots+a_nb_n) \geq (a_1+\cdots+a_n)(b_1+\cdots+b_n)$$

이제 양변을 n^2으로 나누면 구하는 체비셰프 부등식이다. □

보기 6

$a, b > 0$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$$

(주) 물론 잘 정리한 후 완전제곱식으로 풀어줄 수도 있고, 그밖에 앞의 보기와 예제들처럼 여러 가지 풀이가 있을 수 있겠지만, 이제 여기서는 체비셰프 부등식으로 보는 방법만을 살피자.

증명 형태를 잘 들여다보면 바로 체비셰프 부등식임을 볼 수 있을 것이다.

$$\frac{a \cdot a + b \cdot b}{2} \geq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a+b}{2}$$ □

예제 7

$a, b, c > 0$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

기본문제 3.3.1

(**네스빗 부등식**, Nesbitt) 양수 a, b, c에 대해 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

관찰 좌변의 식에서 세 항이 각각

$$\frac{a}{b+c}+1=\frac{a+b+c}{b+c}$$

와 같이 변형되므로, 위 부등식의 양변에 3을 더하면 다음과 같은 부등식이 된다.

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\geq\frac{9}{2}$$

이 식에서 $x=a+b$, $y=b+c$, $z=c+a$ 로 두면, $x+y+z=2(a+b+c)$ 이므로

$$2f(a,b,c)=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$$

와 같은 부등식을 증명하려는 것이 된다.

증명1 위 관찰의 식을 전개하면

$$2f(a,b,c)=(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=3+\underbrace{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{y}{z}+\frac{z}{y}}_{\geq 2}+\underbrace{\frac{z}{x}+\frac{x}{z}}_{\geq 2}\geq 9$$

이런 부등식이 나온다. 산술-기하 평균 부등식이 쓰였고, 등호는 $\frac{x}{y}=\frac{y}{x}$, $\frac{y}{z}=\frac{z}{y}$, $\frac{z}{x}=\frac{x}{z}$ 일 때 성립한다. 이것은 $x=y=z$ 와 같은 조건이고, 또 $a=b=c$ 인 것과 같다. □

증명2 (산술-조화 평균 부등식에서)

$$\frac{u+v+w}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}}\quad\Longleftrightarrow\quad(u+v+w)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w}\right)\geq 9$$

이런 부등식이 나온다. u, v, w를 위 증명에서의 x, y, z로 보면 원하는 부등식이 되고, 등호 조건은 $x=y=z$, 즉 $a=b=c$ 일 때이다. □

증명3 (산술-기하 평균 부등식에서)

$u+v+w \geq 3\sqrt[3]{uvw}$ 을 위 관찰의 식에 적용하면

$$2f(a,b,c) = (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 3\sqrt[3]{xyz}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}} = 9$$

와 같이 원하는 부등식이 나온다. 등호 조건은 앞의 증명들에서와 같다. □

증명4 **(재배열 부등식으로부터!)**

부등식의 좌변은 대칭식이므로, 일반성을 잃지 않고 a, b, c의 크기 순서를 $a \geq b \geq c$ 인 것으로 가정할 수 있다. 그럼 $b+c \leq c+a \leq a+b$ 가 되고, 그 역수를 취하면

$$\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b}$$

의 크기 순서가 성립한다. 따라서, 여기에 재배열 부등식을 적용하면

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \dfrac{1}{b+c} & \dfrac{1}{c+a} & \dfrac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b & c & a \\ \dfrac{1}{b+c} & \dfrac{1}{c+a} & \dfrac{1}{a+b} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \dfrac{1}{b+c} & \dfrac{1}{c+a} & \dfrac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} c & a & b \\ \dfrac{1}{b+c} & \dfrac{1}{c+a} & \dfrac{1}{a+b} \end{bmatrix}$$

의 두 부등식을 얻을 수 있다. 이 두 식을 합하면

$$2\begin{bmatrix} a & b & c \\ \dfrac{1}{b+c} & \dfrac{1}{c+a} & \dfrac{1}{a+b} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} b+c & c+a & a+b \\ \dfrac{1}{b+c} & \dfrac{1}{c+a} & \dfrac{1}{a+b} \end{bmatrix} = 1+1+1 = 3$$

으로, 원하는 부등식이 된다. □

유제 (1990년 한국 수학올림피아드) $a_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ 이고 $s = a_1 + \cdots + a_n$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{a_1}{s-a_1} + \frac{a_2}{s-a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-a_n} \geq \frac{n}{n-1}$$

힌트 이것은 네스빗 부등식이 확장된 형태이다.

기본문제 3.3.2

자연수 m, n에 대해, 다음 부등식을 증명하여라.

$$m^m n^n \geq m^n n^m$$

관찰 지수를 곱으로 전개하면 이 부등식은

$$\underbrace{(m \cdot \cdots \cdot m)}_{m\text{번}}\underbrace{(n \cdot \cdots \cdot n)}_{n\text{번}} \geq \underbrace{(m \cdot \cdots \cdot m)}_{n\text{번}}\underbrace{(n \cdot \cdots \cdot n)}_{m\text{번}}$$

과 같다. 즉, m 혹은 n의 자연수를 양쪽 다 총 $m+n$번 곱하는데, 좌변은 큰 수를 보다 여러 번, 우변은 작은 수를 보다 여러 번 곱하는 경우로 생각할 수 있다.

증명 대칭식이므로, 일반성을 잃지 않고 $m \geq n$ 이라 할 수 있다. n^n과 m^n을 이항하면(m과 n을 양변에서 각각 n개씩 약분하면)

$$m^{m-n} \geq n^{m-n}$$

의 부등식과 같다. 양변의 지수가 $m-n$으로 같고 또 음이 아니므로, 우변의 밑 n을 더 큰 수인 m으로 바꾸어준 좌변이 당연히 크다(크거나 같다). 등호는 $m = n$ 일 때 성립한다. □

유제 임의의 양의 유리수 a, b에 대해, 다음 부등식을 증명하여라.

$$a^a b^b \geq a^b b^a$$

연습문제 3.3.1

다음 부등식을 증명하여라.

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{(a+b+c)/3}$$

단, a, b, c는 양의 유리수이다.

연습문제 3.3.2

$0 < a \leq b \leq c \leq d$ 인 정수일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$a^b b^c c^d d^a \geq b^a c^b d^c a^d$$

연습문제 3.3.3

$a, b, c > 0$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

연습문제 3.3.4

$x_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ 이고, $s = x_1 + \cdots + x_n$ 이라 하자. 다음을 증명하여라.

$$\frac{s}{s - x_1} + \frac{s}{s - x_2} + \cdots + \frac{s}{s - x_n} \geq \frac{n^2}{n-1}$$

연습문제 3.3.5

$x, y, z > 0$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$$

연습문제 3.3.6

$x, y, z > 0$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

연습문제 3.3.7

음 아닌 실수 a, b에 대해, 다음을 증명하여라.

$$(a+b)(a^4+b^4) \geq (a^2+b^2)(a^3+b^3)$$

연습문제 3.3.8

양수 a, b, c에 대해, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}}{2}$$

연습문제 3.3.9

$a, b, c > 0$ 일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$abc(a+b+c) \leq a^3b + b^3c + c^3a$$

연습문제 3.3.10

(2002년 캐나다 수학올림피아드) 다음 부등식을 증명하여라.

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab$$

도전문제 3.3.1

$0 < a \le b \le c \le d$ 인 양의 실수일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$a^b b^c c^d d^a \ge b^a c^b d^c a^d$$

도전문제 3.3.2

(1975년 국제 수학올림피아드) $\{x_i\}$, $\{y_i\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ 들을 같은 순서로 정렬된 수열이라 하고, $\{z_i\}$를 $\{y_i\}$의 재배열이라 하자. 다음을 증명하여라.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 \le \sum_{i=1}^{n}(x_i - z_i)^2$$

단, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 을 의미한다.

도전문제 3.3.3

(1978년 국제 수학올림피아드) $\{a_i\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ 를 서로 다른 양의 정수들의 수열이라 하자. (즉, 무한히 수열이 계속 되는 동안 같은 수가 두 번 나타나지 않는다.) 임의의 양의 정수 n에 대해, 다음을 증명하여라.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \ge \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

도전문제 3.3.4

다음과 같은 표기법을 정의하고, 이 부등식을 증명할 수 있겠는가?

$$\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a'_1 & \cdots & a'_n \\ b'_1 & \cdots & b'_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x'_1 & \cdots & x'_n \end{bmatrix}$$

단, 수열 $\{a_k\}$, $\{b_k\}$, $\dots$, $\{x_k\}$ 들은 모두 같은 순서로 정렬되어 있고, 수열 $\{a'_k\}$, $\{b'_k\}$, $\dots$, $\{x'_k\}$ 들은 앞의 수열들의 재배열이다.

제 4 장

도형의 성질

4.1 닮음과 비례

■ 파프스의 문제

파프스는 비례에 관한 많은 사실들을 발견했는데 그 중에서 다음 문제가 가장 유명한 것 중의 하나입니다.

파프스의 중선정리

$\triangle ABC$에서 변 BC의 중점을 M이라 하면,

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

이 파프스의 중선정리는 상당히 유명한 만큼 증명 방법이 꽤 많이 알려져 있습니다. 증명은 그리 어렵지는 않습니다.

예제 1

피타고라스의 정리를 이용해 파프스의 중선정리를 증명하여라.

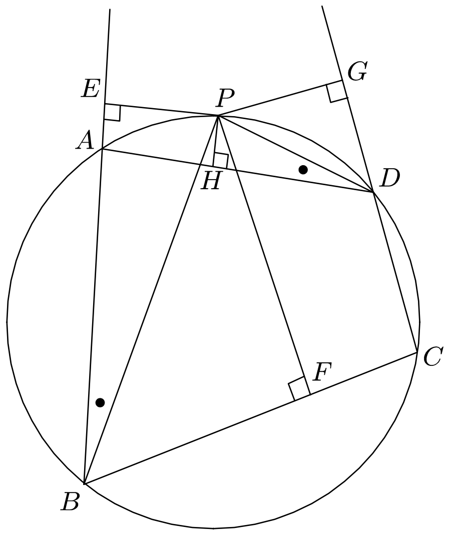
힌트 A에서 BC에 수선을 내려 H라 하자.

파프스의 정리 1

원에 내접하는 사각형의 외접원 위의 임의의 점 P에서 AB, BC, CD, DA 또는 그 연장선에 수선 PE, PF, PG, PH를 내리면

$$PE \cdot PG = PF \cdot PH$$

증명 아래 그림에서



$\triangle PEB$와 $\triangle PHD$는 직각삼각형이고 $\angle ABP = \angle PDA$ 이므로

$$\triangle PEB \sim \triangle PHD, \qquad \therefore \frac{PE}{PH} = \frac{PB}{PD}$$

같은 방법으로 $\triangle PBF$와 $\triangle PDG$는 직각삼각형이고 $\angle PBF = \angle PDG$ 이므로

$$\triangle PBF \sim \triangle PDG, \qquad \therefore \frac{PG}{PF} = \frac{PD}{PB}$$

위에서 유도한 두 식을 서로 곱하면 $\frac{PE}{PH} \cdot \frac{PG}{PF} = 1$ 로부터

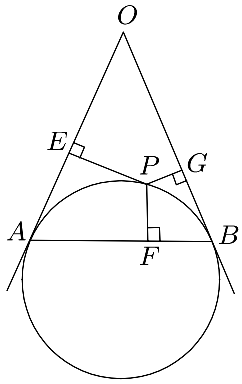
$$PE \cdot PG = PF \cdot PH$$

임이 증명된다. □

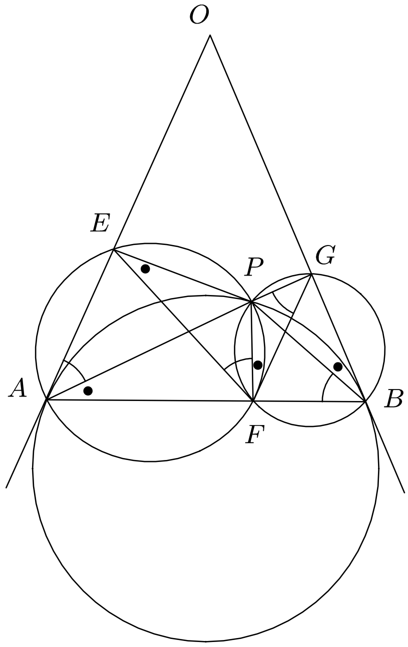
파프스의 정리 2

원 O의 공통 접선을 OA, OB라 하고 그림과 같이 원 O 위의 임의의 한 점 P에서 OA, OB, AB에 수선을 내려 그 발을 각각 E, G, F라 하면

$$PF^2 = PE \cdot PG$$



증명 $\angle E = \angle G = \angle AFP = \angle PFB = \angle R$ 이므로 $\square EAFP$, $\square PFBG$는 대각의 크기의 합이 $180°$가 되어 원에 내접한다.



현 BP와 접선 BG가 이루는 각 $\angle PBG$는 현 BP의 원주각 $\angle PAF$와 같다. 그리고 하나의 현에 대응되는 원주각의 크기는 일정하므로,

$$\angle PFG = \angle PBG = \angle PAF = \angle PEF$$

마찬가지로

$$\angle PFE = \angle PAE = \angle PBF = \angle PGF$$

위 두 식으로부터 $\triangle PEF \sim \triangle PFG$이고,

$$PE : PF = PF : PG$$

따라서 $PF^2 = PE \cdot PG$이 성립한다. □

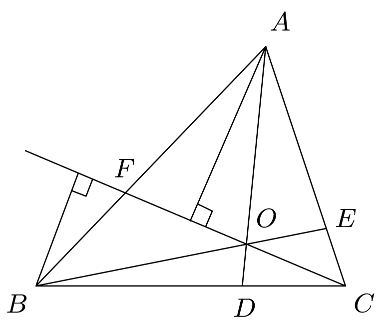
■ 반 아우벨의 문제

반 아우벨(Van Aubel, 1881년)의 정리

$\triangle ABC$ 내의 한 점 O에서 만나는 세 직선 AO, BO, CO가 대변과 각각 D, E, F에서 교차하면

$$\frac{AO}{DO} = \frac{AF}{BF} + \frac{AE}{CE}$$

증명 A, B에서 CF에 내린 수선의 길이의 비는 $AF : BF$로 주어진다.



$\triangle AOC$와 $\triangle BOC$는 밑변 OC가 공통이므로 넓이의 비는 수선의 길이의 비인

$$\frac{\triangle AOC}{\triangle BOC} = \frac{AF}{BF}$$

로 주어진다. 같은 방법으로

$$\frac{\triangle AOB}{\triangle BOC} = \frac{AE}{CE}$$

도 알 수 있다. 따라서

$$\frac{\triangle AOC + \triangle AOB}{\triangle BOC} = \frac{AF}{BF} + \frac{AE}{CE}$$

가비의 원리로부터 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned}\frac{AO}{DO} &= \frac{\triangle AOB}{\triangle BOD} = \frac{\triangle AOC}{\triangle COD} \\ &= \frac{\triangle AOB + \triangle AOC}{\triangle BOD + \triangle COD} = \frac{\triangle AOB + \triangle AOC}{\triangle BOC}\end{aligned}$$

위 두 식으로부터

$$\frac{AO}{DO} = \frac{AF}{BF} + \frac{AE}{CE}$$

임을 알 수 있다. □

예제 2

다음 제르곤의 정리를 증명하여라.

제르곤(Gergonne, 1818년)의 정리

$\triangle ABC$ 내의 임의의 한 점을 O라 하고, AO, BO, CO의 연장선이 대변과 만나는 점을 각각 D, E, F라 하면

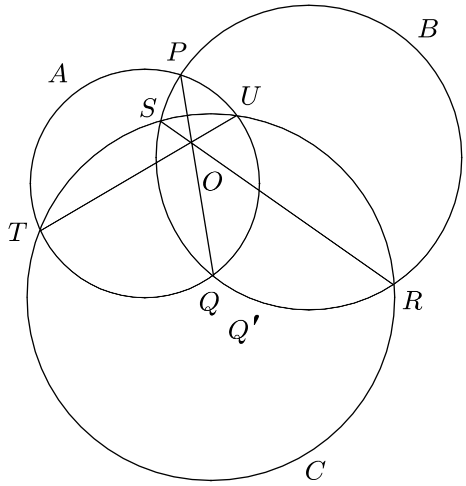
$$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$$

■ 몬즈의 문제

몬즈(Monge, 1764년–1818년)의 정리

세 원 A, B, C가 서로 두 점에서 교차할 때 세 공통현은 한 점에서 만난다.

증명 두 원 A와 B, B와 C, C와 A의 공통현을 각각 PQ, RS, TU라 하고, RS, TU의 교점을 O라 하자.



OP의 연장선과 원 A, B와의 교점을 각각 Q, Q'이라 하면

원 C에서 $RO \cdot OS = TO \cdot OU,$

원 A에서 $TO \cdot OU = PO \cdot OQ,$

원 B에서 $RO \cdot OS = PO \cdot OQ'.$

위 세 식으로부터 $PO \cdot OQ = PO \cdot OQ'$를 유도할 수 있다. 따라서 $OQ = OQ'$, 즉 Q와 Q'는 동일점이고 PQ가 O를 지난다. □

예제 3

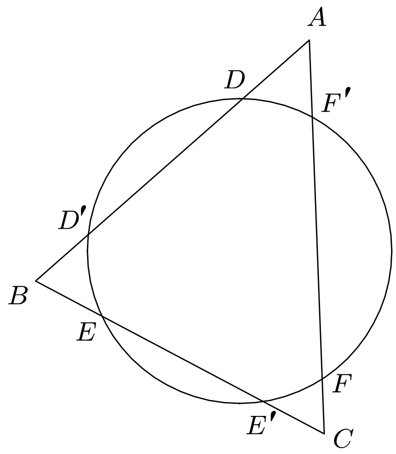
다음 카르노의 정리를 증명하여라.

카르노(Carnot, 1803년)의 정리

$\triangle ABC$의 세 변 AB, BC, CA 또는 그 연장선이 한 원과 각각 D와 D', E와 E', F와 F'에서 만날 때

$$\frac{AD \cdot BE \cdot CF}{BD \cdot CE \cdot AF} \cdot \frac{AD' \cdot BE' \cdot CF'}{BD' \cdot CE' \cdot AF'} = 1$$

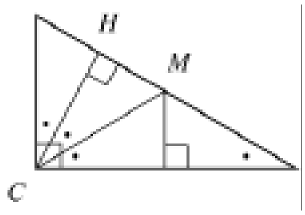
이 성립한다.


A
D
F′
D′
B
E
F
E′
C

기본문제 4.1.1

(1987년 한국 수학올림피아드) $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형 ABC의 빗변 AB의 중점을 M, 꼭지점 C에서 빗변 AB에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 선분 CH, CM은 $\angle C$를 삼등분한다. 이 때, $\triangle CHM : \triangle ABC$ 를 구하여라.

풀이 $90°$의 $\frac{1}{3}$은 $30°$이고, 그럼 아래 그림과 같이 합동인 4개의 작은 직각삼각형을 발견할 수 있다.



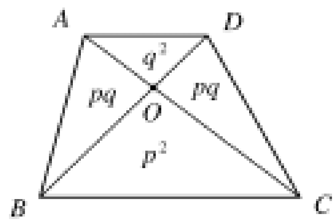
따라서, $\triangle CHM$은 원래의 직각삼각형의 $\frac{1}{4}$이다. $\cdots$ **답** $1 : 4$ ♢

유제 삼각형 ABC의 변 CB와 CA의 길이는 a, b이고, 그 사잇각이 $\angle C = 120°$이다. $\angle C$의 이등분선의 길이를 a와 b로 나타내어라.

기본문제 4.1.2

$AD//BC$인 사다리꼴 $ABCD$의 두 대각선의 교점을 O라 하자. $\triangle BOC = p^2$, $\triangle AOD = q^2$ 이면, 사다리꼴 $ABCD$의 넓이는 $(p+q)^2$임을 증명하여라.

풀이 두 삼각형 BOC와 AOD는 닮은 삼각형이고 넓이의 비가 $p^2 : q^2$ 이므로 길이의 닮음비는 $p : q$ 가 된다. 즉, $BO : DO = CO : AO = p : q$ 이다. 두 삼각형 BOC와 COD를 C에서의 높이가 같은 삼각형으로 보면 넓이비는 밑변의 길이의 비가 되므로, $\triangle BOC : \triangle COD = BO : DO = p : q$, 즉 $\triangle COD = pq$ 이다. 마찬가지로 $\triangle AOB = pq$.



따라서, 사다리꼴 $ABCD$의 넓이는 $p^2 + q^2 + 2pq = (p+q)^2$. ◇

유제 삼각형 ABC의 변 AB 위에 점 C_1을 잡고, C_1C를 그리자. A를 통과하고 C_1C에 평행한 직선이 변 BC의 연장선과 만나는 점을 A_1이라 하고, 비슷하게, B를 통과하고 C_1C에 평행한 직선이 변 AC의 연장선과 만나는 점을 B_1이라 하자. 이 때

$$\frac{1}{AA_1} + \frac{1}{BB_1} = \frac{1}{CC_1}$$

임을 증명하여라.

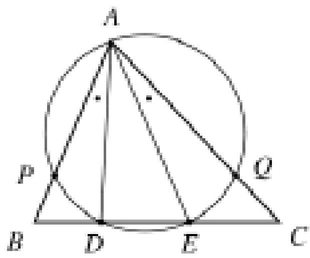
기본문제 4.1.3

$\triangle ABC$에서 변 BC 위의 두 점 D, E에 대하여 $\angle BAD = \angle CAE$ 이면,

$$AB^2 : AC^2 = BD \cdot BE : CD \cdot CE$$

임을 증명하여라.

풀이 A, D, E를 지나는 원이 AB, AC와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.



$\angle PAD = \angle QAE$ 이므로 $PD = QE$ 이고, $\angle PDB = \angle PAE = \angle QAD = \angle QEC$ 이므로 PQ는 BC에 평행하다. 따라서, $AB : AC = AP : AQ = BP : CQ$ 이고

$$AB^2 : AC^2 = AB \cdot BP : AC \cdot CQ$$

또, A, P, D, E는 한 원 위에 있으므로, 원의 할선의 성질에 의해

$$AB \cdot BP = BD \cdot BE, \qquad AC \cdot CQ = CD \cdot CE$$

그러므로, $AB^2 : AC^2 = BD \cdot BE : CD \cdot CE$. ♢

유제 중심이 O인 원의 지름 AB와 접선 TD(D가 접점)가 있다. C는 지름 AB 위의 점이고, E는 C에서 접선 TD에 내린 수선의 발이면,

$$AC \cdot CB + CD^2 = CE \cdot AB$$

임을 증명하여라.

연습문제 4.1.1

삼각형 ABC의 변 BC, CA, AB의 중점을 각각 D, E, F라 할 때,

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = \frac{3}{4}(BC^2 + CA^2 + AB^2)$$

이 성립함을 증명하여라.

연습문제 4.1.2

AB와 AC는 원 O의 접선이고 각각 B, C에서 접한다. 지름 BD에 수직하게 현 CE를 그린다. 그럼

$$BE \cdot BO = AB \cdot CE$$

임을 증명하여라.

연습문제 4.1.3

반지름이 6인 원 O가 있다. 현 CD는 중심 O로부터 3만큼 떨어진 거리에 있다. 호 CD(짧은 쪽)의 중점을 A라 하자. 임의의 현 AB를 그리고, CD와의 교점을 M이라 하자. B가 움직임에 따라 변하는 $AB \cdot AM$ 의 값의 범위를 구하여라.

연습문제 4.1.4

평행사변형 $ABCD$의 꼭지점 A를 지나고 대각선 BD, 변 CD, 변 BC의 연장선과 각각 P, Q, R에서 만나는 직선에 대하여,

$$PD^2 : PB^2 = PQ : PR$$

임을 증명하여라.

연습문제 4.1.5

중심이 O인 반원 위에 점 D, A, C, B가 순서대로 있고, 두 현 AB, CD가 있다. A와 C에서 원의 접선의 교점 P에서 AB, CD에 내린 수선의 발을 각각 E, F라고 하면,

$$PE : PF = AB : CD$$

임을 증명하여라.

연습문제 4.1.6

$\angle A$가 예각인 평행사변형 $ABCD$이 있다. 두 대각선의 교점 O에서 BC에 내린 수선의 발을 E라 하고, OE의 연장선이 AB와 만나는 점을 F라고 하면,

$$BE \cdot (AB + 2BF) = BC \cdot BF$$

임을 증명하여라.

연습문제 4.1.7

사각형 $ABCD$가 있다. $\angle ABC = \angle DCB$ 이고, DA의 연장선과 CB의 연장선이 만나는 점을 P라고 하면,

$$PA \cdot PD = PB \cdot PC + AB \cdot CD$$

임을 보여라.

연습문제 4.1.8

$\triangle ABC$에서 $\angle A$의 이등분선이 BC와 만나는 점을 D, 외접원과 만나는 점을 E라 하면,

$$\frac{AB \cdot AC}{AD \cdot AE} = 1$$

임을 증명하여라.

연습문제 4.1.9

(1991년 아시아-태평양 수학올림피아드) 주어진 삼각형 ABC에서 무게중심을 G, 변 BC의 중점을 M이라 하고, G를 지나고 변 BC에 평행인 직선이 변 AB, AC와 만나는 점을 각각 X, Y라 한다. 선분 GC, YB의 교점을 P라 하고, GB, XC의 교점을 Q라 하면, 삼각형 MPQ는 삼각형 ABC와 닮은꼴임을 밝혀라.

연습문제 4.1.10

(1996년 아시아-태평양 수학올림피아드) 마름모 $ABCD$가 있다. 변 AB, BC, CD, DA 위에 각각 점 E, F, G, H를 잡는데, 선분 EF와 HG가 대각선 BD에 수직이 되도록 한다. EF와 HG의 사이의 거리가 일정하면 육각형 $AEFCGH$의 둘레의 길이도 일정함을 보여라.

연습문제 4.1.11

선분 AB를 지름으로 하는 반원에서 현 AC를 잡고, 활꼴 AC를 현 AC를 따라 접어내려 얻어진 새로운 호 AC가 선분 AB와 만나는 점을 D라 하자. $AB = 10$, $AD : DB = 2 : 3$ 일 때, 선분 AC의 길이의 제곱은 얼마인가?

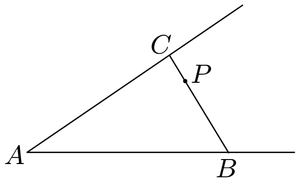
연습문제 4.1.12

평행사변형 $ABCD$의 두 대각선 중에서 긴 쪽을 AC라 하자. C에서 AB와 AD의 연장선에 수선을 내리자. E와 F가 이 수선의 발이라 할 때, 다음을 증명하여라.

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = (AC)^2$$

도전문제 4.1.1

(1979년 미국 수학올림피아드) 다음 그림과 같이 각 A와 내부의 한 점 P가 주어져 있다.



점 P를 지나는 직선이 두 반직선과 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 이 때 $\dfrac{1}{BP}+\dfrac{1}{PC}$ 이 최대가 되도록 하는 직선 BC를 작도하여라.

도전문제 4.1.2

$\triangle ABC$의 외접원 위의 점 P에서 BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자. AD, BE의 중점을 각각 L, M이라 하면, DE, LM은 서로 수직임을 보여라.

도전문제 4.1.3

사다리꼴 $ABCD$의 두 대각선의 교점을 M이라 하자. $AD//BC$, $AB \perp AD$ 이고 이 사다리꼴의 내접원이 존재한다. 이 내접원의 반지름을 R이라 했을 때 $\triangle DCM$의 넓이를 구하여라.

4.2 작도

유클리드 기하학의 기본 철학은 최소한의 공리들로써 많은 정리들을 추론하려는 것이었습니다. 그래서 이러한 정신을 이어받아 최소한의 도구만으로 유클리드 기하학에서 다루는 모든 도형들을 그려내려는 생각은 자연스러운 것이었습니다. 실제로, BC 375년 경에 그리스의 철학자 플라톤은 눈금없는 자와 컴퍼스만을 이용하여 작도를 할 것을 제안했고, 위의 두 가지 도구만을 이용하여 원하는 도형을 그리는 방법을 찾아내는 문제를 **작도** 문제 혹은 유클리드 작도 문제라고 합니다.

■ 작도

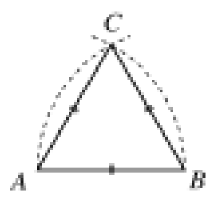
정의

작도란 '처음에 주어져 있는 점들과 아래의 두 가지 방법만으로 문제를 해결하는 것을 말한다.
(1) 두 점을 잇는 직선을 그릴 수 있다.
(2) 한 점을 중심으로 하고 다른 한 점을 지나는 원을 그릴 수 있다.

보기 1

선분 AB를 한 변으로 하는 정삼각형을 작도하여라.

풀이 아래 그림에서처럼 A를 중심으로 하고 선분 AB를 반지름으로 하는 원과 B를 중심으로 하고 선분 AB를 반지름으로 하는 원의 교점 중 하나를 C라 하자.



그럼 AC와 AB는 원 A의 반지름이므로 길이가 같고, 마찬가지로 BC의 길이도 같다. 그러므로 ABC는 정삼각형이다. ◇

예제 2

$\angle A$의 이등분선을 작도하여라.

예제 3

한 직선 ℓ과 이 직선 위의 한 점 P가 주어졌을 때, 점 P를 지나고 직선 ℓ에 수직인 직선을 작도하여라.

예제 4

한 직선 ℓ과 이 직선 위에 있지 않은 한 점 P가 주어졌을 때, 점 P를 지나고 직선 ℓ에 수직인 직선을 작도하여라.

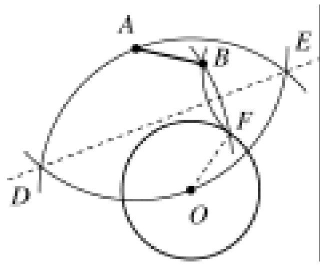
사실, 플라톤이 제안한 작도에서 쓰이는 컴퍼스는 지금 우리가 사용하는 접혀지지 않는 컴퍼스와는 다릅니다. 접혀지는 컴퍼스를 사용하면 주어진 선분과 합동인 선분을 작도하는 것이 어렵습니다. 하지만, 접혀지지 않는 컴퍼스에서는 컴퍼스로 선분의 양끝을 찍고, 이를 그대로 들어서 옮길 수 있으니까, 합동인 선분을 쉽게 얻을 수 있습니다. 이에 대해 생각해봅시다.

컴퍼스 동등정리

작도 문제에서 접혀지는 컴퍼스를 사용하는 것은 접혀지지 않는 컴퍼스를 사용하는 것과 동치이다.

증명 접혀지는 컴퍼스를 이용하여 임의의 선분을 임의의 반직선 위로 옮길 수 있음을 보이면 된다. 즉, 임의의 점 O를 중심으로 주어진 선분 AB를 반지름으로 하는 원을 그릴 수 있으면 된다.

우선, A를 중심으로 하고 O를 지나는 원과 O를 중심으로 하고 A를 지나는 원을 그린다.



이 두 원이 만나는 교점을 D와 E라고 하자. 또, D를 중심으로 하고 B를 지나는 원과 E를 중심으로 하고 B를 지나는 원을 그리고 이 두 원의 교점을 F라 하자. 그러면 DE에 대한 선대칭에 의해 $OF = AB$ 이고, O를 원점으로 하고 F를 지나는 원을 그리면 이 원은 AB를 반지름으로 하는 원이 된다. □

이제 우리는 눈금없는 자와 쉽게 구할 수 있는 컴퍼스만으로 작도한다고 해도 됩니다. 몇 가지 작도에 관한 예를 봅시다.

보기 5

주어진 선분 AB를 이등분하여라.

풀이 중심이 각각 A, B이고 반지름이 AB인 두 원을 그린다. 두 원의 교점 X, Y를 연결하는 직선을 그리고, 이 직선과 선분 AB와의 교점을 M이라 하면, 이 점이 선분의 이등분점이다. ♢

예제 6

주어진 선분 AB의 수직이등분선을 작도하여라.

보기 7

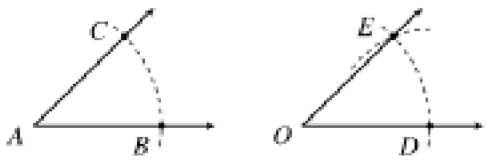
$\angle A$의 이등분선을 작도하여라.

풀이 중심을 A로 하는 호를 그리고, 이 호가 $\angle A$의 변과 C와 D에서 만난다고 하자. C와 D를 중심으로 각각 AD를 반지름으로 하는 원을 그린다. 두 원은 직선 DC의 양쪽에서 만나므로 P를 직선 DC에 대하여 점 A와 반대쪽에 있는 점이라 하자. 반직선 AP를 그으면, SSS합동에 의하여 $\triangle ABC \equiv \triangle ACP$ 이므로, 반직선 AP가 각의 이등분선이다. ♢

보기 8

$\angle A$를 임의의 반직선 위에 작도하여라.

풀이 $\angle A$의 반직선 중 하나에 임의의 점 B를 잡자.



그리고 A를 중심으로 하고 AB를 반지름으로 하는 원을 그린 후 $\angle A$의 다른 반직선과의 교점을 C라 하자. 반직선 OX 위에서 O를 중심으로 하고 반지름이 AB인 원을 그리고 이 반직선과의 교점을 D라 하자. 또 D를 중심으로 하고 반지름이 BC인 원을 그린 다음, 원 O와의 교점을 E라 하자.

$$AB = AC = OD = OE, \quad BC = DE$$

이므로 $\triangle ABC \equiv \triangle ODE$. 따라서 $\angle A = \angle EOD$. ♢

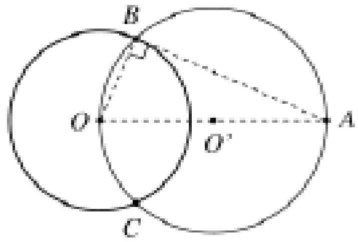
예제 9

점 P를 지나고 직선 ℓ에 평행한 직선을 작도하여라.

보기 10

원 O와 이 원 밖의 점 A가 주어져 있다. 이 때 점 A를 지나는 원 O의 접선을 작도하여라.

풀이 선분 OA의 중점 O'을 찾고, OA를 지름으로 하는 원 O'을 작도한다.



원 O와 원 O'의 교점을 B, C라 하면, $\angle OBA$는 원 O'의 반원에 대한 원주각이므로 직각이다. 따라서 선분 AB는 원 O의 접선이다. 그러므로 직선 AB와 직선 AC를 작도하면 된다. ♢

■ 몇 가지 선분의 길이의 작도

단위길이 1과 두 선분의 길이 a, b가 주어졌을 때,

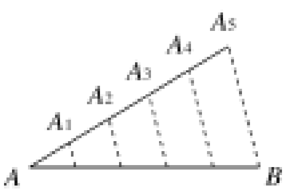
$$a+b, \quad a-b, \quad a \cdot b, \quad \frac{a}{b}, \quad \sqrt{a}$$

등을 길이로 하는 선분은 작도 가능합니다. 그리고, 선분의 길이를 n등분하는 것도 가능합니다. 그러나, 세제곱근처럼 일반적으로는 작도 불가능한 것들도 있습니다. 유명한 작도 불가능 문제는 '단위원과 넓이가 같은 정사각형 작도하기', '주어진 정육면체가 있을 때 부피가 정확히 두 배인 정육면체 작도하기', '임의의 각을 삼등분하기' 등이 있습니다.

보기 11

다음 선분 AB를 5등분하여라.

풀이 아래 그림과 같이 A에서 시작하는 직선을 하나 그려 $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$ 가 되게 잡고, A_5와 B를 잇는다.



나머지 네 점에서 직선 A_5B와 평행한 직선을 그리면 AB와의 교점들이 구하는 5등분점들이 된다. ♢

예제 12

길이가 m인 선분과 n인 선분이 있다. 이 때 m인 선분을 $m:n$ 으로 내분하는 점을 작도하여라.

■ 자취를 이용한 작도

이러한 작도 문제를 해결하기 위해서는 우선 어떤 중요한 점을 찾아내야 할 때가 많습니다. 그 점은, 주어진 조건들을 만족하는 점들의 자취의 교점이 될 것입니다. 이렇게 작도 문제를 해결하는 방법을 '자취를 이용한 작도법'이라고 합니다.

보기를 들어봅시다.

보기 13

주어진 세 점을 지나는 원을 작도하여라.

관찰 주어진 세 점을 A, B, C라 하자. 이 경우는 원의 중심 O를 찾아내면 문제가 해결된다. 이 때 O는 세 점으로부터 같은 거리에 있는 점이다. 세 점으로부터 같은 거리에 있는 점은 그 중 두 점으로부터도 (당연히!) 같은 거리에 있다. 즉, O는 세 점 A, B, C 중 두 점으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취(두 점을 잇는 선분의 수직이등분선)들의 교점으로 얻어질 수 있다.

풀이 선분 AB의 수직이등분선을 그린다. 또, 선분 BC의 수직이등분선을 그린다. 두 수직이등분선의 교점이 A, B, C를 지나는 원의 중심 O이다. ♢

이 방법으로 작도 문제를 풀기 위해서는 눈금 없는 자와 컴퍼스만으로 작도할 수 있는 자취를 많이 알고있어야 합니다. 이러한 도형을 몇 가지로 요약하면 다음과 같습니다. 아래 결과들 중 몇 개는 앞에서 보인 것들이고, 그 외의 것들도 앞의 내용

을 이용하여 증명할 수 있는 것들입니다. (물론 눈금없는 자와 컴퍼스만으로 작도할 수 있습니다.)

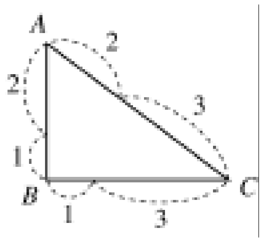
1. 주어진 점으로부터 주어진 거리를 가지는 점들의 자취는 주어진 점을 중심, 주어진 거리를 반지름으로 가지는 원이다.
2. 주어진 직선으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취는 주어진 직선에 평행한 두 개의 직선이다.
3. 주어진 두 개의 점으로부터 같은 거리를 가지는 점들의 자취는 주어진 두 개의 점을 잇는 선분의 수직이등분선이다.
4. 서로 만나는 주어진 두 개의 직선과 같은 거리에 있는 점들의 자취는 이 두 직선에 의하여 만들어진 각의 이등분선이다.
5. 선분과 한 각의 크기가 주어졌을 때, 한 점에서 주어진 선분의 양 끝점까지 그은 직선에 의하여 만들어진 각이 주어진 각과 같은 점들의 자취는 주어진 선분을 현으로 하는 두 개의 호이다. 특히, 주어진 각이 직각일 경우는 주어진 선분이 지름이다.
6. 주어진 두 점에서부터 거리비가 일정한 점들의 자취는 원이다. 이 원은 주어진 두 점을 잇는 선분을 주어진 비율로 내분, 외분하는 점을 잇는 선분을 지름으로 한다. (아폴로니우스의 원)
7. 주어진 만나는 두 직선으로부터 거리비가 일정한 점들의 자취는 교점을 지나는 두 개의 직선이다.
8. 주어진 두 개의 점으로부터 거리의 제곱의 차가 일정한 점들의 자취는 주어진 두 개의 점에 의하여 결정된 직선에 수직인 직선이다.
9. 주어진 두 점으로부터 거리의 제곱의 합이 일정한 점들의 자취는 주어진 두 점을 잇는 선분의 중점을 중심으로 가지는 원이다.

■ 여러 가지 도형의 작도

보기 14

길이가 1, 2, 3인 세 선분이 주어져 있다. 이 때 반지름이 각각 1, 2, 3인 서로 외접하는 세 원을 작도하여라.

풀이 그림처럼 세 변의 길이가 각각 $(1+2)$, $(2+3)$, $(3+1)$인 삼각형을 작도한다.



이 삼각형의 세 꼭지점 A, B, C로부터 반지름이 2, 1, 3인 원을 그리면 이 세 원은 각각 외접한다. ♢

예제 15

그림과 같이 다 그리지 못한 원이 있다. 이 원을 완성시켜 보아라.

예제 16

정오각형의 한 꼭지점을 지나고 넓이를 이등분하는 직선을 작도하여라.

예제 17

황금비율의 직사각형을 하나 작도해 보아라.

예제 18

정오각형을 작도하여라.

예제 19

정15각형을 작도하여라.

♡ 쉬어갑시다 ♡

눈금 없는 자와 콤파스만으로 모든 도형을 작도할 수 있을까요?

'유클리드 원론'의 4권에는 눈금 없는 자와 콤파스만을 이용하여, 원에 내접하는 정 3, 4, 5, 6, 15각형을 작도하는 법을 소개하고 있습니다. 그리고 원주각을 이등분하는 것을 작도할 수 있으므로, $3 \cdot 2^n$, $4 \cdot 2^n$, $5 \cdot 2^n$, $15 \cdot 2^n$각형은 모든 자연수 n에 대하여 작도 가능합니다.

그런데 1796년, 당시 19세였던 독일 수학자 가우스는 소수인 변의 수를 갖는 정다각형이 작도 가능하기 위한 필요충분조건은 이 수가 $f(n) = 2^{2^n} + 1$ 꼴일 때라는 것을 보였습니다. 이 수는 $n = 0, 1, 2, 3, 4$ 일 경우에는 2, 5, 17, 257, 65537이 소수가 된다는 것을 알 수 있습니다. 그리고 $f(5)$는 641로 나누어지는 등, $5 \le n \le 19$인 경우 $f(n)$은 소수가 아닙니다. 그 이후의 수에 대해서는 아직 소수를 찾지 못하였을 뿐만 아니라 이러한 꼴의 소수가 유한 개인지 무한 개인지도 아직 모르고 있습니다.

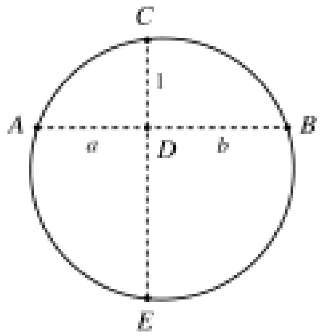
가우스는 작도가 가능하다는 것만을 알았을 뿐 실제의 작도법을 발견하진 못하였습니다. 정17각형의 작도법은 많은 기하학자들에 의하여 밝혀졌고, 정257각형의 경우는 1832년 뤼셀로(F. J. Richelot)에 의하여 밝혀졌고, 정65537각형의 작도법은 한 기하학자가 10년간 노력했으나 결국 포기하기도 하였습니다.

작도 가능한 것을 찾는 것과 더불어 작도 불가능한 것에 대한 논의도 계속되었는데, 정다각형의 경우는 7, 9, 11, 13각형의 경우는 작도 불가능합니다. 또한 위에 소개했던 고대의 세 가지 난문이 모두 작도 불가능하다는 것도 19세기에 증명되었습니다. ♣

기본문제 4.2.1

길이 1, a, b인 선분이 주어졌을 때, 길이가 $a \cdot b$인 선분을 작도하여라.

풀이 $AB = a + b$, $AD = a$, $BD = b$, $CD = 1$이 되게 작도한다.



그리고 삼각형 ABC의 외접원을 작도한 후 이 외접원과 직선 CD의 교점을 E라 하자. 그러면

$$AD \cdot BD = CD \cdot DE$$

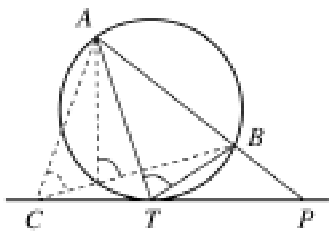
이므로 $DE = a \cdot b$. ♢

유제 (1) 길이 1, a, b인 선분이 주어졌을 때, 길이가 $\frac{a}{b}$인 선분을 작도하여라.
(2) 길이 1, a인 선분이 주어졌을 때, 길이가 $\sqrt{a}$인 선분을 작도하여라.

기본문제 4.2.2

직선 ℓ과 이 직선 밖의 점 A, B가 있다. 직선 ℓ 위에 점 C를 잡았을 때 $\angle ACB$가 최대가 되도록 하는 점 C를 작도하여라.

풀이 A, B를 지나고 ℓ에 접하는 원을 생각하자. 그럼 접점 T를 제외한 직선 ℓ 위의 임의의 점은 이 원 밖에 있으므로 접할 때보다 각이 작아진다. 즉, $\angle ACB$가 최대인 점 C는 접점 T이다.



그럼 이제 두 점 A, B를 지나고 ℓ에 접하는 원을 작도해보자. 직선 AB와 ℓ이 만나는 점을 P라 하자.

$$PT^2 = PA \cdot PB$$

가 성립하므로 $\sqrt{PA \cdot PB}$의 길이를 구하자. 그리고 P를 중심으로 하고 이 길이를 반지름으로 하는 원을 그려 ℓ과의 교점 T를 구하면 된다. ♢

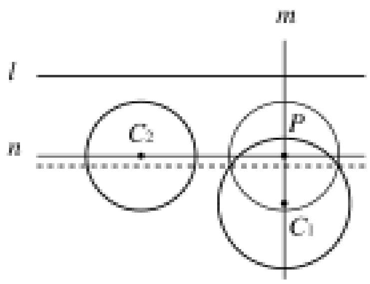
유제 교차하는 두 직선과 이 두 직선 밖의 한 점이 주어져 있다. 두 직선에 각각 접하고 주어진 점을 지나는 원을 작도하여라.

기본문제 4.2.3

주어진 직선 ℓ에 평행한 직선으로, 주어진 두 원 C_1, C_2를 같은 길이를 가지는 현으로 자르고 지나가는 직선을 작도하여라.

(관찰) 만약 C_1, C_2이 겹쳐 있다면, 두 교점을 지나는 직선은 두 원을 같은 길이를 가지는 현으로 자르게 된다. C_2를 적절히 ℓ 방향으로 미끄러뜨려 이와 같은 성질을 이용할 수 있지 않을까? (이런 것을 평행변환법이라 한다.)

(풀이) C_1의 중심을 지나고 직선 ℓ에 수직인 직선을 작도하고, 이 직선을 m이라 하자. 이제 m에 수직하고 C_2의 중심을 지나는 직선을 작도하고, 이 직선을 n이라 하자. 그러면 n은 ℓ과 평행이다. n과 m의 교점을 P라 하면, C_2를 n 방향으로 평행이동하여, P를 중심으로 하고 반지름은 C_2와 같은 원을 그릴 수 있다. 이 원을 C_2'이라 하자.



이 때, 두 원 C_1, C_2'의 교점이 존재하면 이 교점을 지나가는 직선이 바로 구하려는 직선이다. ♢

(주) 위에서 설명한 것은 이렇게도 말할 수 있다: C_2를 ℓ 방향으로 평행이동하여, 두 원 C_1, C_2의 중심을 잇는 직선이 ℓ에 수직하게 만든다.

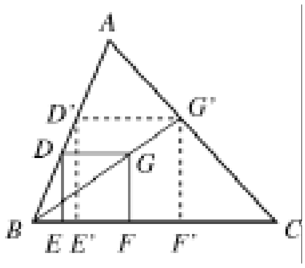
(유제) 주어진 만나는 두 개의 원의 교점 중의 하나를 지나면서 두 원을 같은 길이를 가지는 현으로 자르고 지나가는 직선을 작도하여라. 단 두 원의 공통현을 포함하는 직선은 제외한다.

기본문제 4.2.4

주어진 예각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형을 작도하여라. 단, 정사각형의 한 변은 삼각형의 주어진 한 변 BC에 놓여있어야 한다.

(관찰) 작은 정사각형을 작도하고, 이를 확대시키는 방법을 생각해 본다. (이러한 방법을 닮음변환법이라 한다.)

풀이 변 AB의 변 위에 임의의 점 D를 택하고 거기서 BC에 수선의 발 E를 내려 정사각형 $DEFG$를 작도한다. 이 때, 만약 G가 AC 위에 있다면 이 정사각형이 구하는 정사각형이 된다.



만약 그렇지 않다면, 직선 BG가 AC와 만나는 점을 새로운 G'으로 하고, 거기서 BC에 새 수선의 발 F'을 내려 B를 중심으로 확대된 정사각형 $D'E'F'G'$을 작도한다. ♢

(유제) 주어진 반원에 내접하는 정사각형을 작도하여라.

연습문제 4.2.1 중심이 O인 원에 내접하는 정육각형을 작도하여라.

연습문제 4.2.2 원에 내접하는 정n각형이 작도되었을 때, 정$2n$각형을 작도할 수 있음을 보여라.

연습문제 4.2.3 $60°$의 각을 3등분할 수 없다고 가정하자. 자연수 n이 3의 배수일 때 $\frac{360°}{n}$의 각을 삼등분할 수 없음을 보여라.

연습문제 4.2.4 세 수선의 발이 주어져 있을 때 이에 맞는 삼각형을 하나 작도하여라.

연습문제 4.2.5 한 직선 위에 있지 않은 세 점 P, Q, R이 주어져 있다. P, Q, R을 세 변의 중점으로 하는 삼각형을 찾아라.

연습문제 4.2.6 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C가 주어졌을 때 C를 중심으로 하고 A와 B에서 그은 접선이 서로 평행한 원을 작도하여라.

연습문제 4.2.7

본문 '자취를 이용한 작도'의 7번째 사실인 "주어진 만나는 두 직선으로부터 거리비가 일정한 점들의 자취는 교점을 지나는 두 개의 직선" 을 작도하는 방법을 보여라. 그리고 이를 이용하여, 삼각형 ABC의 내부에 세 변으로부터 주어진 거리비를 가지는 점을 작도하여라.

연습문제 4.2.8

본문 '자취를 이용한 작도'의 8번째 사실인 "주어진 두 개의 점으로부터 거리의 제곱의 차가 일정한 점들의 자취는 주어진 두 개의 점에 의하여 결정된 직선에 수직인 직선" 을 작도하는 방법을 보여라. 그리고 이를 이용하여, 한 변, 대응각, 그리고 다른 두 변의 길이의 제곱의 차이가 주어졌을 때 삼각형을 작도하여라. 단, 단위길이 1은 제시되어 있는 것으로 본다.

연습문제 4.2.9

$\angle A$가 예각인 주어진 $\triangle ABC$에서, 두 변 AB, AC와 각각 D, E에서 만나는 직선을 그려서 $AD = DE$이고, $AE = DB$가 되도록 작도하여 보아라.

연습문제 4.2.10

변 AB의 길이 c, 내접원의 반지름 r, 그리고 변 AB에 접하는 방접원의 반지름 r_c 등 세 가지 길이가 주어졌을 때 삼각형 ABC를 작도하여라.

연습문제 4.2.11

세 점 A, B, C가 주어져있을 때 A를 중심으로 하고 이웃한 변(또는 연장선)이 각각 B와 C를 지나는 정사각형을 작도하여라.

도전문제 4.2.1 $n = ab$ 일 때 정n각형이 작도 가능하다면 정a각형과 정b각형도 작도 가능함을 보여라.

도전문제 4.2.2 a, b가 서로 소이고 정a각형, 정b각형이 작도 가능하면 정ab각형도 작도 가능함을 보여라.

도전문제 4.2.3 주어진 세 개의 평행선 각각에 세 꼭지점이 놓여 있는 정삼각형을 작도하여라.

도전문제 4.2.4 한 원에 접하고 이 원 밖의 두 점을 지나는 원을 작도하여라.

도전문제 4.2.5 세 점 A, B, C와 $\angle PQR$이 주어져 있다. 두 점 A, B를 지나는 원 중에서, 점 C에서 이 원에 그은 두 접선이 이루는 각의 크기가 $\angle PQR$이 되는 원을 작도하여라.

제 5 장

경우의 수와 조합

5.1 파스칼의 삼각형

다음의 숫자들의 나열을 관찰해 봅시다.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots
\end{array}
$$

이 숫자들은 어떤 규칙으로 나열된 것 같나요? 그리고 다음 번 행에는 어떤 숫자들이 나타날까요? 바로 정답을 얻기가 힘들 수 있으니, 이 나열에서 관찰되는 성질들을 찾아봅시다.

관찰 1

(1) 각 행에서 첫 번째 숫자와 마지막 숫자는 무엇인가?
(2) 각 행은 몇 개씩의 숫자로 이루어져 있는가?
(3) 각 행에서 두 번째 숫자와 거꾸로 두 번째의 숫자는 무엇인가?
(4) 중앙에 세로선을 긋는 것을 상상한다면, 그 세로선을 기준으로 좌우에 배열된 수들은 어떤 특징이 있는가?

풀이 (1) 모두가 1이다.
(2) 1개, 2개, 3개, 4개, 5개이다. 즉, i번째 행은 i개의 수를 가질 것임을 추측할 수 있다.
(3) 1, 2, 3, 4이다. 이렇게 1씩 늘어나는, 자연수들을 차례로 늘어놓는 수열임을 추측할 수 있다.
(4) 가운데를 중심으로 좌우의 수들이 거울처럼 대칭으로 배열되어 있다. ♢

위의 사실들은 아주 쉽게 찾을 수 있는 것들입니다. 이제 본격적으로 위의 수의 나열이 가지고 있는 좀더 깊은 성질들을 찾아봅시다.

실험 2

(5) 각 행에 있는 수들을 모두 더해보아라. 어떤 결과가 나오는가?

풀이 각 행의 수들의 합을 차례로 구해보자.

$$
\begin{array}{rccccc}
\text{첫 번째 행의 수들을 모두 더하면} & 1 & = & 1 & = 2^0 \\
\text{두 번째 행의 수들을 모두 더하면} & 1+1 & = & 2 & = 2^1 \\
\text{세 번째 행의 수들을 모두 더하면} & 1+2+1 & = & 4 & = 2^2 \\
\text{네 번째 행의 수들을 모두 더하면} & 1+3+3+1 & = & 8 & = 2^3 \\
\text{다섯 번째 행의 수들을 모두 더하면} & 1+4+6+4+1 & = & 16 & = 2^4
\end{array}
$$

어떤 결과가 나오는가? i번째 행의 수들을 모두 더하게 되면 2의 거듭제곱수, 즉 2^{i-1}이 됨을 알 수 있다. ♢

지금까지의 관찰과 실험들을 바탕으로 다음의 행을 추측해 봅시다. 여섯 번째 행은 우선 관찰 (1)–(3)에 의해 다음과 같이 된다는 것을 추측할 수 있습니다.

$$1 \quad 5 \quad * \quad * \quad 5 \quad 1$$

관찰 (4)에 의해 $*$에 들어갈 두 수는 같은 수이고, 실험 (5)에 의하면

$$1+5+*+*+5+1 = 2^5 = 32$$

임을 추측할 수 있습니다. 그래서 $* = 10$임을 얻을 수 있겠네요. 자, 그래서 6번째 행은 다음과 같이 구해졌습니다.

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

그럼 7번째 행은 어떨까요?

$$1 \quad 6 \quad * \quad * \quad * \quad 6 \quad 1$$

여기까지는 쉽게 되지만 이 이상은 잘 안 되네요. $*$의 자리 중 중앙을 x, 양끝을 y라 하면 $x+2y+14=64$, 즉 $x+2y=50$ 이라는 것 밖에는...

숫자의 나열을 다시 잘 관찰하여 또 다른 성질이 있나 찾아봅시다.

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
1 \quad 6 \quad * \quad * \quad * \quad 6 \quad 1 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

아하! 위 숫자의 나열에서

$$
\begin{array}{c}
3+3 \\
\| \\
4+6 \\
\| \\
10
\end{array}
$$

과 같은 관계가 관찰되나요? 좌우로 이웃한 두 수를 합해 그 결과를 바로 밑에 적는 그런 나열인 것 같군요. 나머지 수들도 모두 그렇게 만들어졌다는 것을 지금 확인해 보세요. 틀림없죠? 좌우의 1들은 맨처음의 1을 물려받은 것이라고 생각하면 됩니다. 즉, 첫 행의 1의 좌우에 0들이 양쪽으로 계속 나열되어 있었고,

$$
\begin{array}{c}
\cdots \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \\
\cdots \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \\
\cdots \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \\
\cdots \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

0과 1을 합해 그 다음의 1들이 만들어졌다고, 그리고나서는 0을 모두 생략했다고도 상상할 수 있겠습니다.

위와 같이 처음에 1 하나를 쓰고, 거기서부터 이웃한 두 수의 합을 바로 아래에 쓰면서 나열해 가는 수의 배열을 **파스칼의 삼각형**이라고 합니다.

보기 3

파스칼의 삼각형의 7번째, 8번째, 9번째 행을 계속 구하여라.

풀이 규칙에 따라 6번째 행

$$1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1$$

로부터 둘씩 더해 만들면 된다.

$$1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1$$
$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$
$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$

위와 같이 나온다. ♢

그럼 이쯤에서 여러분이라면 당연히 뭔가 재미있는 질문을 하나 가지게 되었을텐데, 그것이 무엇인가요? 네, 바로 다음과 같은 것입니다.

물음 4

위에서 구했던 7번째, 8번째, 9번째 행에서도 그 행의 수들을 모두 더하면 2의 거듭제곱이 되는가?

풀이 차례로 합을 구해서 확인해보자.

7번째 행은 $1+6+15+20+15+6+1 = 64 = 2^6$

8번째 행은 $1+7+21+35+35+21+7+1 = 128 = 2^7$

9번째 행은 $1+8+28+56+70+56+28+8+1 = 256 = 2^8$

모두 2의 거듭제곱이 틀림없다. ♢

정말 신기하죠? '이웃한 두 수를 더해 그 아래에 적는다'는 규칙이 2의 거듭제곱과는 어떻게 연관되는 것일까요? 이 원리는 사실 그리 신기한 것은 아니랍니다. 다음의 그림에서 뭔가를 알아차릴 수 있을 것입니다.

```
  1 3 3 1
 /\/\/\/\
1 4 6 4 1
```

각각의 수가 그 다음 행에는 꼭 두 번씩 기여를 하고 있군요. 그래서 전체의 합이 두 배가 되는 것입니다. 즉,

$$\begin{aligned} 1+4+6+4+1 &= (1)+(1+3)+(3+3)+(3+1)+(1) \\ &= (1+1)+(3+3)+(3+3)+(1+1) \\ &= 2(1+3+3+1) = 2\cdot 2^3 = 2^4 \end{aligned}$$

와 같은 계산으로도 볼 수가 있지요.

파스칼의 삼각형의 성질

파스칼의 삼각형에서, 첫 행을 제 0행이라 하고 각 행의 첫 번째 수를 제 0열의 수라고 하자. 그리고, 제 n행 제 r열의 수를 $C_{n,r}$로 쓰기로 하자. 그럼 다음과 같은 식이 성립한다.

(A) $C_{0,0} = C_{n,0} = C_{n,n} = 1$

(B) $C_{n,r} + C_{n,r+1} = C_{n+1,r+1}$

(C) $C_{n,0} + C_{n,1} + \cdots + C_{n,n} = 2^n$

(A)는 각 행의 첫 번째 수와 마지막 수가 1이 된다는 것, (B)는 좌우로 이웃한 두 수를 더하여 그 아래의 수를 만드는 규칙, (C)는 각 행의 수의 합이 2의 거듭제곱이 된다는 것을 각각 식으로 쓴 것입니다.

예제 5

$C_{n,2}$를 n에 관한 식으로 나타내어라.

관찰 $C_{n,2}$는 각 행의 세 번째 수들을 말한다. 물론 $n \geq 2$ 일 때에만 의미가 있다. 파스칼의 삼각형에서 이 세 번째 수들을 찾아 나열해 보면 다음과 같다.

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28,\ \ldots$$

두 수의 차가 1씩 늘어나고 있다. 즉, 1로부터 시작해서, 2를 더하고, 다음 3을 더하고, 다음 4를 더하고, 다음 5를 더하고, ... 이렇게 만들어지는 수열인 것 같다.

풀이 성질 (A)에 의해 $C_{n,0}$은 항상 1이다. 이로부터, 또 성질 (B)에 의해

$$C_{n,1} = C_{n-1,1} + C_{n-1,0} = C_{n-1,1} + 1$$

을 얻을 수 있다. 그리고, 이것은 다시

$$\begin{aligned} C_{n,1} &= C_{n-1,1} + 1 = C_{n-2,1} + 1 + 1 = \cdots \\ &= C_{1,1} + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n-1\text{개}} = 1 + (n-1) = n \end{aligned}$$

으로 정리된다. $C_{n,0}$, $C_{n,1}$을 모두 알았으니 이제 $C_{n,2}$를 구할 차례이다. 성질 (B)로부터

$$C_{n,2} = C_{n-1,2} + C_{n-1,1} = C_{n-1,2} + (n-1)$$

을 얻을 수 있다. 그리고, 이것은 다시

$$\begin{aligned} C_{n,2} &= C_{n-1,2} + (n-1) = C_{n-2,2} + (n-2) + (n-1) = \cdots \\ &= C_{2,2} + 2 + \cdots + (n-1) = 1 + 2 + \cdots + (n-1) \end{aligned}$$

으로 정리된다. 이 식은 잘 알려진 가우스의 방법에 의하여

$$C_{n,2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

와 같다. ♢

위 풀이의 식들은 파스칼의 삼각형 그림에서 관찰한다면 더 쉽게 이해할 수 있습니다. 스스로 원리를 그림에서 찾아보세요.

보기 6

조합 ${}_n\mathrm{C}_r$은 서로 다른 n개의 물건에서 r개를 고르는 경우의 수를 나타낸다. 이것은

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}{r \times \cdots \times 2 \times 1} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

와 같이 계산된다는 것을 고등학교 수학에서 배우게 될 것이다. $n = 3, 4, 5$일 때의 ${}_n\mathrm{C}_r$들을 모두 구해보아라.

풀이 $n=3$일 때

$$_3\mathrm{C}_0=1,\quad {_3\mathrm{C}_1}=\frac{3}{1}=3,\quad {_3\mathrm{C}_2}={_3\mathrm{C}_1}=3,\quad {_3\mathrm{C}_3}=1$$

$n=4$일 때

$$_4\mathrm{C}_0=1,\quad {_4\mathrm{C}_1}=4,\quad {_4\mathrm{C}_2}=\frac{4\times 3}{2\times 1}=6,\quad {_4\mathrm{C}_3}={_4\mathrm{C}_1}=4,\quad {_4\mathrm{C}_4}=1$$

$n=5$일 때

$$_5\mathrm{C}_0=1,\quad {_5\mathrm{C}_1}=5,\quad {_5\mathrm{C}_2}=\frac{5\times 4}{2\times 1}=10,\quad {_5\mathrm{C}_3}=10,\quad {_5\mathrm{C}_4}=5,\quad {_5\mathrm{C}_5}=1$$

정리하면 다음과 같다.

$$\begin{matrix} {_3\mathrm{C}_0}\ {_3\mathrm{C}_1}\ {_3\mathrm{C}_2}\ {_3\mathrm{C}_3} \\ {_4\mathrm{C}_0}\ {_4\mathrm{C}_1}\ {_4\mathrm{C}_2}\ {_4\mathrm{C}_3}\ {_4\mathrm{C}_4} \\ {_5\mathrm{C}_0}\ {_5\mathrm{C}_1}\ {_5\mathrm{C}_2}\ {_5\mathrm{C}_3}\ {_5\mathrm{C}_4}\ {_5\mathrm{C}_5} \end{matrix} \quad = \quad \begin{matrix} 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \\ 1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1 \\ 1\ \ 5\ \ 10\ \ 10\ \ 5\ \ 1 \end{matrix}$$

◊

파스칼의 삼각형이 나왔네요. 어떻게 된 것일까요? 파스칼의 삼각형에 나오는 수들은 조합의 수들과 같답니다. 거꾸로 얘기하면, 파스칼의 삼각형을 만드는 규칙에 의해서 조합의 수들을 계산할 수도 있는 것이 되겠습니다.

그럼 파스칼의 삼각형과 조합이 이렇게 일치하는 것은 과연 어떻게 설명되는 것일까요? 조합의 계산이 파스칼의 삼각형을 만드는 규칙에 의해서도 계산된다는 것을 이해할 수 있으면 될 것입니다. 그것을 증명해 봅시다.

파스칼의 등식

조합 $_n\mathrm{C}_r$은 파스칼의 삼각형의 규칙

$$_n\mathrm{C}_0={_n\mathrm{C}_n}=1,\qquad {_{n+1}\mathrm{C}_{r+1}}={_n\mathrm{C}_r}+{_n\mathrm{C}_{r+1}}$$

을 만족한다. 따라서, 파스칼의 삼각형의 수열과 같다.

증명 우선 ${}_n\mathrm{C}_0 = {}_n\mathrm{C}_n = 1$ 은 조합의 약속에 해당하는 것이므로 그냥 받아들인다. 혹은

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

의 식에 $r = 0$ 혹은 $r = n$을 대입한 것으로 보아도 좋다. 다음 관계식 역시 이 공식으로 증명해보자.

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{r+1} &= \frac{n!}{r!\,(n-r)!} + \frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!} \\ &= \frac{n!}{(r+1)!\,(n-r)!}[(r+1)+(n-r)] \\ &= \frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n-r)!} = {}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} \end{aligned}$$

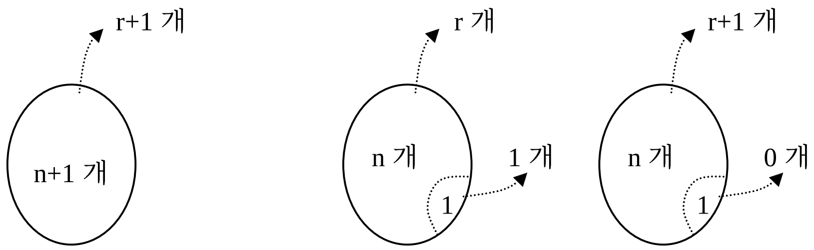
따라서, 관계식도 증명되었다. 이 식에 의해, 제 n행까지의 $C_{n,r}$들이 모두 ${}_n\mathrm{C}_r$과 일치한다면 제 $n+1$행에서도 역시 일치한다는 것을 알 수 있다. 따라서, 모든 행에서 두 수열이 일치할 수밖에 없다. □

별해 위 파스칼의 등식을 또 다른 방법으로 증명해 보자. 이번엔 ${}_n\mathrm{C}_r$의 식 대신 그것의 정의

'서로 다른 n개의 물건에서 r개를 고르는 경우의 수'

를 이용하자.

$n+1$개의 수들의 모임 $A = \{1, 2, \ldots, n+1\}$에서 $r+1$개의 수를 고른다. 그런데, 고른 수들 중에 $n+1$이 있는 경우와 없는 경우로 나눌 수 있을 것이다. $n+1$을 고르는 경우는 나머지 n개의 수 중에서 r개를 고르면 되므로 ${}_n\mathrm{C}_r$가지의 방법이 있고, $n+1$을 고르지 않는다면 나머지 n개의 수 중에서 $r+1$를 골라야 하므로 ${}_n\mathrm{C}_{r+1}$가지의 방법이 있다.



따라서, 합의 법칙에 의해

$${}_{n+1}\mathrm{C}_{r+1} = {}_n\mathrm{C}_r + {}_n\mathrm{C}_{r+1}$$

이 성립한다. □

이 별해와 같이, 경우의 수를 계산하는 공식을 사용하지 않고, 그 정의로부터 경우를 잘 따져주는 방법으로 증명하는 것을 **조합적인 논의**에 의한 증명이라고 합니다.

기본문제 5.1.1

다음의 수의 배열을 **유사 파스칼의 삼각형**이라고 하자.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & & \\
 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\
1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
$$

(1) 다음 다섯 번째 행이 무엇이 될지 예측하여라.

(2) 위 문제의 수 배열에서 제 n행의 모든 수의 합을 구하고, 그것을 증명하여라. 단, 첫 행을 제 0행으로 한다.

(3) 각 행에는 홀수가 항상 홀수 개 있음을 증명하여라.

풀이 (1) 이 삼각형꼴의 배열은 맨 첫 행에 1을 쓰고, 이웃한 세 항의 합을 그 아래에 적는 규칙으로 만들어진 것이다. 따라서, 다섯 번째 행은 네 번째 행으로부터 계산하면 다음과 같이 된다.

$$1 \quad 4 \quad 10 \quad 16 \quad 19 \quad 16 \quad 10 \quad 4 \quad 1$$

(2) 한 행에서 다음 행을 만들 때, 하나의 수가 세 곳에 더해진다. 따라서, 수의 합은 항상 3배씩 커진다. 제 0행의 수(의 합)가 1이었으므로, 제 n행의 수의 합은 3^n이다.

(3) 이 수열은 좌우 대칭의 성질을 갖는다. 따라서, 가운데의 항을 제외하면 그 양쪽에는 같은 수의 홀수와 같은 수의 짝수들이 있다. 즉, 가운데의 항을 제외하면 홀수의 수는 항상 짝수 개이다. 그럼, 가운데의 항이 항상 홀수임을 확인하면 모든 행에서 홀수의 수가 항상 홀수 개가 됨을 알 수 있다. 가운데의 항은 맨 처음이 1이었으므로 홀수이고, 그 다음부터는 거기다 양 옆의 똑같은 수를 더해서 얻어진다.

$$
\begin{array}{ccc}
* & x & * \\
\backslash & | & / \\
 & y &
\end{array}
$$

즉, 위의 그림처럼 x가 홀수라면 거기에 짝수를 더한 $y = x + 2*$ 도 홀수일 수 밖에 없다. 따라서, 가운데의 항은 항상 홀수이고, 모든 행에는 항상 홀수가 홀수 개 있다. ♢

주 (3)은 (2)의 결과를 이용해 간단히 증명할 수도 있다. 즉, 한 행의 수의 합이 3^n으로 홀수이므로, 거기에는 홀수가 홀수 개 있을 수 밖에 없다.

유제 다음은 첫 행에 1 1 1을 쓰고 그 다음부터 파스칼의 삼각형의 규칙을 적용한 수 배열이다.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

첫 행을 제 0행으로 할 때, 제 n행의 수의 합을 구하고, 그것을 증명하여라. 또, 각 행의 첫 번째 수를 제 0열의 수로 할 때, 제 n행 제 2열의 수를 n에 대한 식으로 나타내어라.

기본문제 5.1.2

다음 그림은 중앙의 1로부터 시작하여 파스칼의 삼각형을 여섯 방향으로 배열한 꼴이다.

$$\begin{array}{c} \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \\ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 3 \\ 3\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 3 \\ \cdots\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ \cdots \\ 3\ \ 2\ \ 1\ \ 1\ \ 2\ \ 3 \\ 3\ \ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 3 \\ 1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}$$

중앙의 1을 0번째 껍질, 그 바깥의 여섯 개의 1을 1번째 껍질, 그 바깥의 여섯 개씩의 1과 2를 2번째 껍질, ... 이렇게 부르기로 하자.

(1) n번째 껍질에 나열된 수의 합을 구하고, 그것을 증명하여라.

(2) 위에서 1인 수들을 다 들어냈을 때 눈에 띄는 중앙에 가장 가까운 6개의 2가 또 정육각형을 구성하고 있다. 이것은 1번째 핵이라고 하자. 이 정육각형과 같은 중심을 갖고 각 변이 평행한 정육각형들을 차례로 n번째 핵이라고 할 때, n번째 핵의 수의 합을 구하여라.

풀이 (1) 각 껍질은 정육각형꼴로 생겼으므로 똑같은 모양의 6개의 변이 있음에 주목하자. n번째 껍질의 한 변에 있는 수들은 파스칼의 삼각형에서 제 n행에 있는 수들과 같다. 따라서, 한 변의 수들의 합은 2^n이 된다. 6개의 변이 있으므로 이것을 여섯 배 해주면 된다.

단, 꼭지점들은 그것을 공유한 두 변에서 세어주고 있으므로, 이렇게 계산하면 꼭지점의 수들은 두 번씩 더한 결과가 된다. 따라서, 꼭지점의 수들을 다시 한 번씩 빼주면 된다. 꼭지점에 있는 수는 파스칼의 삼각형에서 각 행의 양끝에 있는 수이므로 항상 1이다. 따라서,

$$6 \cdot 2^n - 6$$

이 구하는 합이 된다.

단, 이것은 $n \geq 1$일 때에만 해당하는 답이고, $n=0$일 때는 별도로 1이 된다.

(2) n번째 핵의 한 꼭지점은 파스칼 삼각형의 제 $2n$행의 중앙, 즉 ${}_{2n}\mathrm{C}_n$의 수이다. 따라서, 이들 수의 합은

$$6 \cdot {}_{2n}\mathrm{C}_n = \frac{6 \cdot (2n)!}{(n!)^2}$$

이 된다. ◇

유제 다음 그림은 중앙의 1로부터 시작하여 유사 파스칼의 삼각형을 네 방향으로 배열한 꼴이다.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & \\
\cdots & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & \cdots \\
 & 6 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 6 & \\
 & 7 & 3 & 1 & 1 & 1 & 3 & 7 & \\
 & 6 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 6 & \\
\cdots & 3 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 3 & \cdots \\
 & 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 & \\
 & & \vdots & & & & \vdots & &
\end{array}$$

이 배열의 n번째 껍질의 수의 합을 구하고, 그것을 증명하여라. 단, 중앙의 1은 0번째 껍질이다.

연습문제 5.1.1

파스칼의 삼각형에서 홀수 개의 홀수들을 갖는 행을 모두 찾아라.

연습문제 5.1.2

다음 부등식을 증명하여라. $(n > 3)$

$$_{n+1}\mathrm{C}_1 + {}_{n+1}\mathrm{C}_2 + {}_{n+1}\mathrm{C}_3 < 2({}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_3)$$

연습문제 5.1.3

다음의 유사 파스칼의 삼각형에서

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

첫 행을 제 0행, 각 행의 첫 항을 제 0열이라고 하자. 그리고, 제 n행 제 r열의 수를 $D_{n,r}$로 쓰기로 하자.

(1) $D_{n,1}$을 n에 대한 식으로 나타내어라.

(2) $D_{n,2}$을 n에 대한 식으로 나타내어라.

연습문제 5.1.4

(1988년 영국 수학올림피아드) 유사 파스칼의 삼각형에는 첫 행과 두 번째 행을 제외하면 더 이상 모든 항이 홀수가 되는 행은 나타나지 않는다. 이것을 증명하여라.

연습문제 5.1.5

다음은 첫 행에 1 1 1을 쓰고 그 다음부터 파스칼의 삼각형의 규칙을 적용한 수 배열이다.

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ & \vdots & & \vdots & \end{array}$$

첫 행을 제외하면 더 이상 모든 항이 홀수가 되는 행은 나타나지 않음을 증명하여라.

연습문제 5.1.6

(2001년 KAIST 사이버원격교육) 이번에는 파스칼의 삼각형을 변형하여, 다음과 같이 생긴 삼각형을 생각하자.

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \quad 1 \\ 2 \quad 2 \quad 2 \\ 3 \quad 4 \quad 4 \quad 3 \\ 4 \quad 7 \quad 8 \quad 7 \quad 4 \\ 5 \quad 11 \quad 15 \quad 15 \quad 11 \quad 5 \\ 6 \quad 16 \quad 26 \quad 30 \quad 26 \quad 16 \quad 6 \\ 7 \quad 22 \quad 42 \quad 56 \quad 56 \quad 42 \quad 22 \quad 7 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

이 삼각형의 좌a항, 우b항에 있는 수 $D(a,b)$를 정의하는 관계식을 구하고, $D(a,b)$의 일반항을 구하여라. 단, 좌우 첫항은 좌우0항으로 한다. 또, 이 삼각형의 제n행에 있는 수의 합을 구하여라.

도전문제 5.1.1

다음은 파스칼의 삼각형을 3차원으로 확장시켜 **파스칼의 사면체**를 만들고 그것의 단면을 차례로 나열한 것이다.

$$
1 \qquad
\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \end{matrix} \qquad
\begin{matrix} 1 & & 2 & & 1 \\ & 2 & & 2 & \\ & & 1 & & \end{matrix} \qquad
\begin{matrix} 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 3 & & 6 & & 3 & \\ & & 3 & & 3 & & \\ & & & 1 & & & \end{matrix} \qquad \cdots
$$

파스칼의 사면체의 원리를 설명하고, 각 단면의 수의 합을 구하여라. 또, 파스칼의 삼각형의 수들을

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} $$

과 같이 나타내듯이, 파스칼의 사면체의 수들을 표현하는 식을 찾아라.

도전문제 5.1.2

위와 같은 방법으로 계속 확장하여, 일반적인 n차원의 파스칼의 도형을 설명할 수 있겠는가?

도전문제 5.1.3

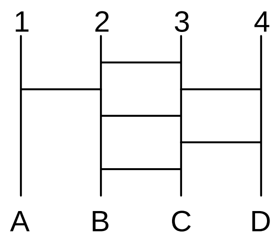
파스칼의 삼각형에서 k가 다음과 같을 때의 제 k행들에는 항상 모든 항이 홀수가 됨을 증명하여라.

$$ 0,\ 1,\ 3,\ 7,\ 15,\ \ldots,\ 2^n-1,\ \ldots $$

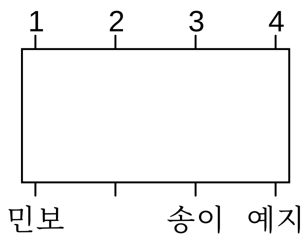
5.2 사다리 타기의 비밀

송이와 민보와 장수와 예지는 어느 수학 캠프에서 같은 토론조가 되었습니다. 셈이 선생님은 조별로 토론하여 해결할 숙제로 네 문제를 나눠주었답니다. 송이가 "얘들아, 마침 딱 네 문제니까 우선 한 문제씩 책임을 맡아서 풀어보자. 그리고 나서 다 같이 토론하는 거야." 라고 제안했고, 모두들 동의했답니다. "(민보) 그런데, 누가 어느 문제를 맡을까?" "(장수) 사다리를 타자!"

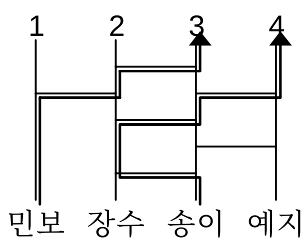
장수가 열심히 사다리를 그렸습니다.



"(장수) 다 그렸다!" "(예지) 그럼 사이를 이렇게 가려야지. 장수가 그렸으니까 다른 사람들이 먼저 고르자." "그래, 난 이것!" 이렇게 송이, 민보, 예지 세 학생이 다음과 같이 골랐습니다. 남은 하나는 당연히 장수 것이죠.



"(장수) 어떻게 되었는지 볼까?" "(민보) 나는 3번이야. 너희들은?" "(송이) 나는 4번, 그리고 예지는 1번이구나."



"(장수) 그럼 나는 남아있는 2번이겠지? 이제 다들 자기가 풀 문제가 결정되었으니까 풀어볼까?"

그런데, 이 때 송이에게 물음이 떠올랐답니다. "(송이) 얘들아, 그런데 왜 사다리를 타면 항상 꼭 한 가지씩 대응되도록 결정을 할 수 있는 걸까?" "(예지) 응... 글쎄, 어떻게 잘 그리면 두 사람의 길이 한 곳으로 모이도록 할 수도 있을 것 같은데..."

"그런 일은 일어나지 않는단다."

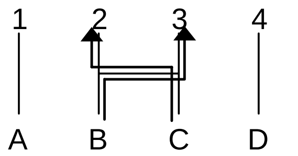
"(민보) 어, 선생님!" 와, 갑자기 나타난 셈이 선생님의 말씀이었군요.

■ 사다리는 항상 일대일대응인가

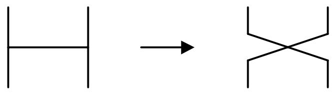
"(선생님) 사다리는 언제나 일대일대응을 한단다. 그러니까, 둘이 한 곳에 대응되는 경우는 없어." "(예지) 그걸 어떻게 알 수 있어요, 선생님?" "너희들도 잘 생각해보면 설명을 찾을 수 있을 걸? 먼저 가장 간단한 사다리에서 관찰을 해보렴." "(장수) 가장 간단한 사다리라면 가로가 하나도 없이 세로 막대만 있는 사다리인가요?" "하하, 그래 정말 간단한 사다리구나. 그것보다는 조금 더 복잡한 것이면 좋겠는데?" "(민보) 그럼 가로가 하나 있는 거요!" "그래, 가로가 하나 있는 사다리. 그걸 생각해볼까?" "(장수) 선생님, 제가 그릴게요." 장수가 또 열심히 사다리를 그렸습니다.

"(선생님) 이야아, 장수가 오른쪽과 같은 사다리도 알고 있구나." "저희들도 모두 알아요!" "하하, 그래. 이렇게 가로가 하나 있는 사다리를 **교환**이라고 한단다. 특히 왼쪽 사다리처럼 바로 이웃한 세로선을 연결하는 교환을 **인접교환**이라고 하지. 이 교환에서는 분명히 언제나 일대일대응이 되겠지?" "(예지) 예, 이렇게 둘이 서

로 자리를 옮겨가니까요.”

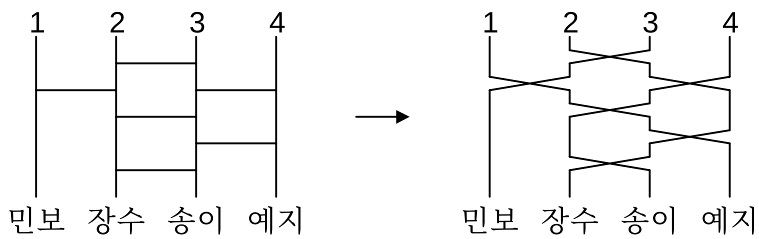


“그래, 교환은 항상 둘의 자리를 바꾸어놓는 대응이겠구나. 그럼 다음과 같이 가로선을 X-꼴의 선으로 바꾸어 놓으면 더 보기 좋지 않을까?”



“(민보) 와, 그렇게 하면 되는구나. 아까 교환 사다리는 그럼 이렇게 되는 거군요. X-자로 꼬인 선을 곧게 펴면 오른쪽 그림처럼 2와 3의 자리가 바뀌는 거구요.”

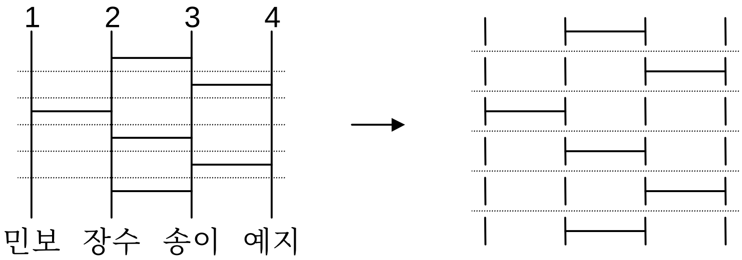
“(장수) 선생님, 그럼 제가 아까 저희들끼리 만들었던 사다리를 X-자로 다시 그려볼게요.”



장수는 사다리 그리는 것을 참 좋아하는군요. “(송이) 와, 이렇게 그리고 보니까 아까 사다리를 탔던 그 대응이 한눈에 보이네! 저는 4번이 맞아요.” “(선생님) 그래, 이제 일대일대응이 한눈에 보이지? 길이 많이 꼬여 있기는 해도 누가 몇 번에 대응이 되는지 이제는 금방 알아볼 수 있겠네. 저 X-자들을 술술 풀어서 말이야.”

“좀더 엄밀히 말한다면 아래 그림에서와 같이 사다리를 나누면 된단다. 아무리 복잡한 사다리라 할지라도 가로선들을 그 높이에 따라 순서를 매길 수 있겠지? 똑같은 높이에 여러 개의 가로선이 있을 때에도 임의로 한쪽을 약간 더 높이면 되니까

문제는 없어. 이렇게 사다리를 층으로 나누면 각 층은 가로를 하나씩만 가지고 있으니까 모두 교환이 되겠지. 일대일대응인 교환 여러 개가 순서대로 작용을 해서 복잡한 사다리를 구성하니까 결국 전체 사다리도 일대일대응이 되는거야."

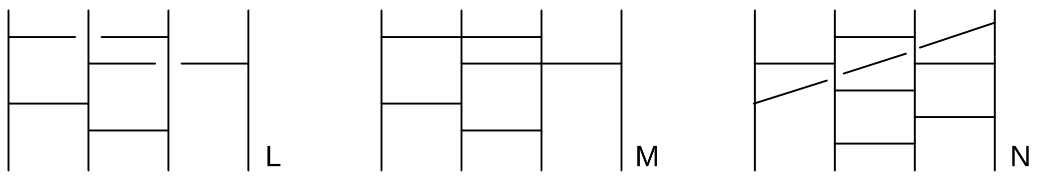


"(민보) 아아, 알겠다." "(예지) 선생님 그런데요, 사다리를 뒤집어 놓으면 그것도 사다리가 되잖아요? 그리고 원래 사다리에서 제가 1에 대응이 된다면 뒤집어 놓은 사다리에서는 길을 거꾸로 밟게 되니까 반드시 1이 저 예지에게 대응이 되고요. 그러니까 사다리는 언제나 일대일대응이 되는 거라고 생각할 수도 있지 않나요?" 와, 예지가 멋진 생각을 했군요. 여러분도 예지가 무슨 생각을 했는지 이해할 수 있을까요? 예지의 생각을 이 교재의 끝에 도전문제로 적어놓았으니 도전해 보기 바랍니다.

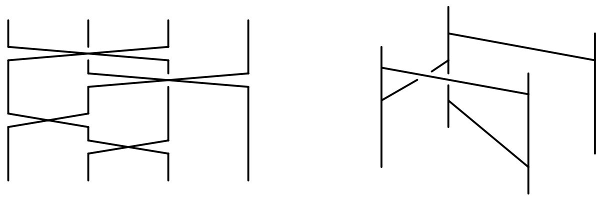
■ 변형 사다리

"(송이) 이제 알았어요, 선생님. 그런데 사다리 타기를 하다보면 종종 사다리를 엉뚱하게 그리는 친구들이 있거든요. 가로를 비스듬하게 그린다거나 여러 줄에 동시에 걸쳐있게 그린다거나 하고요." 송이는 호기심이 많은 친구로군요. 호기심은 공부를 즐겁게 하는 원동력이 된답니다. 여러분도 무엇이든 '왜 그럴까'하고 다시 생각해보는 버릇을 들여보세요.

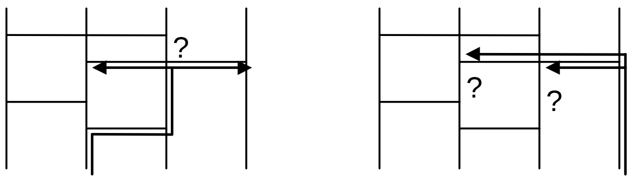
"그러니? 송이 얘기대로라면 아래 그림들과 같은 경우를 말하는 거지?" 여러분도 본 적이 있겠죠?



“사다리 L은 이미 앞에서 논의했던 것들과 다름없어. 꼭 인접교환이 아니더라도 교환이기만 하면 앞에서와 똑같은 결론이 나오는 거니까. X-자로 분석할 때 그 X-자가 좀 커질 뿐이고, 또 입체적으로 세운 사다리로 생각할 수도 있지.”



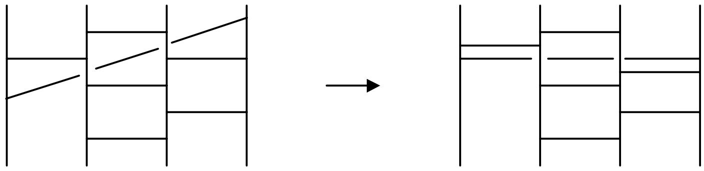
“(장수) 사다리 M은 곤란해요. 가로를 저렇게 그리면 길을 어디로 따라가야 하는지 알 수가 없어지니까요.” “잘 알고 있구나.”



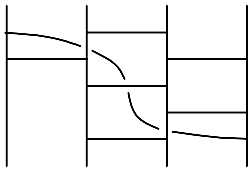
“(송이) 그럼요, 그 정도는 쉬운걸요? 아까부터 궁금했던 건 N과 같은 사다리에요. 이런 식으로 비스듬한 길을 만들면 길이 이상해질 수도 있을 것 같은데, 길이 복잡해지긴 해도 일대일대응이 안 되는 경우를 보지는 못했거든요.” “(선생님) 그럼 우리 다함께 생각해 보자. 보통의 사다리에서 얘기했던 방법이 이런 사다리에서는 잘 통하지 않을까?” “(민보) 제가 한번 X-자로 분석을 해볼게요. 그러니까 응... 비스듬한 선은 빼고 나머지를 X-자로 만들면...”

“(민보) 풀었어요, 선생님. X-자를 다 풀면 오른쪽 그림처럼 간단한 사다리가 되어버리는데요? 그러니까 비스듬한 선도 그냥 가로선이나 다름없는 걸까요? 그래서 일대일대응이 잘 되는 걸까요?” “(선생님) 잘 했구나. 하지만 좀더 조심해야겠는데? 이번 것은 사실은 원래 그림부터가 비스듬한 선이 가로선과 마찬가지인 경우

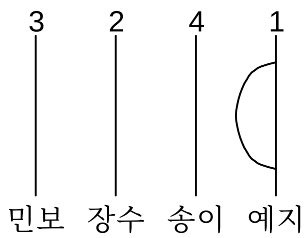
구나. 다음 그림처럼 높이를 잘 조정하면 모두 가로선이 되겠지?"



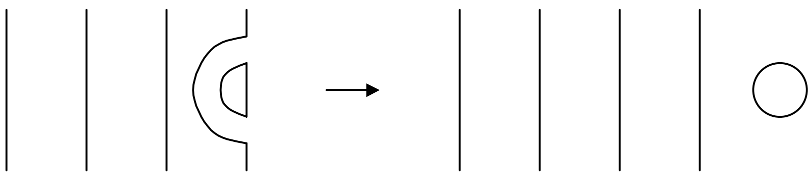
"비스듬하게 그린다는 것을 잘 이용하면 이렇게 평범한 사다리로 바뀌지 않도록 할 수 있을거야. 예를 들어 다음과 같은 사다리라면 어떻겠니?"



"(민보) 아, 그렇군요. 조금 아까 제가 했던 것처럼 다시 하면, 이번에는 비스듬한 사선이 같은 선 위에 중복되어 있네요."



"(장수) 정말 그렇구나. 비스듬한 선이니까 같은 길 위에 양끝점이 모두 있는 경우도 가능한 것이구나." "(송이) 선생님, 그럼 이것은 쓸데없이 그린 선이 되네요." "(선생님) 정말 잘들 생각했어. 너희들이 이렇게 잘 하니까 선생님이 정말 기쁘구나. 하하. 이 모양을 굳이 다시 한번 X-자 분석을 한다면 다음과 같이 전혀 쓰임없는 고리가 하나 추가되어 있는 형상이란다."



모두가 알았다고 끄덕이고 있는데, 예지만 아직도 갸우뚱거리고 있네요. 아직 이해를 못한 것일까요? "(선생님) 예지는 뭘 그리 곰곰히 생각하고 있니?" "(예지) 맞는

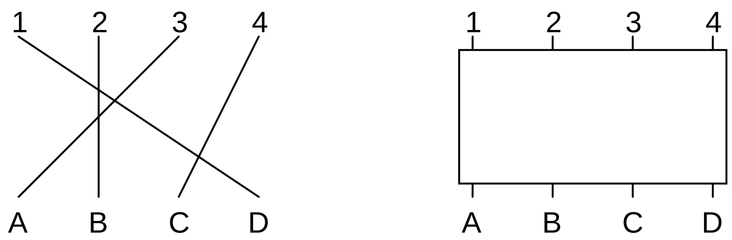
것 같기도 하고... 음... 다 이해는 하겠는데요, 그러니까 음... 아직 끝나지 않았어요, 선생님. 우리가 한 것은 사선이 하나 있을 때만을 본 것이잖아요. 사선이 여러 개 있으면 음...” 어, 정말 그렇군요! 예지는 참 깊게 생각을 하네요. 비스듬한 사선을 여러 개 그릴 때는 어떻게 될까요? 그래도 아마 일대일대응은 될 것 같은데, 어떻게 설명을 할 수 있을까요? 이것도 여러분들을 위해 도전문제로 남겨둘게요.

■ 원하는 사다리를 얻으려면

이번에는 셈이 선생님이 학생들에게 질문을 하시겠답니다. “여러분, 다음 문제를 생각해 보겠니?”

물음 1

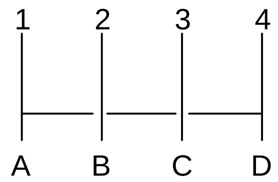
왼쪽 그림과 같은 대응이 되도록 하려면 오른쪽 그림의 가려진 종이 밑에 가로선들을 어떻게 그려야 할까?



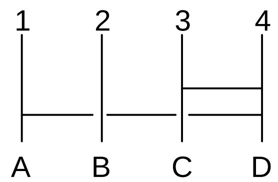
지금 이 문장을 읽기 전에 여러분 스스로 풀어보려고 해 보았겠죠? 스스로 노력을 해야만 발전할 수 있는 것입니다. 스스로 풀어보려 하지 않았다면 다시 예제로 돌아가서 스스로 풀어보기를 바랍니다.

왼쪽 그림의 대응은 송이네가 처음에 그렸던 그 사다리의 대응과 같은 것이로군요. 그러니까 그것을 답으로 하면 되겠죠? 하하, 그러면 안 되죠. 그것은 컨닝이나 마찬가지랍니다. 그럼 어떻게 할까요? 아무렇게나 막 그려서 만들어보려고 하지 말고, 공식같은 것을 찾아봅시다.

풀이 1, 2, 3, 4의 순서대로 맞춰주기로 하자. 먼저 1에 D가 대응되도록 가로선을 하나 그리자.



이 때, 4에 대응되는 것이 D에서 A로 바뀌었음을 기억하고 있자. 다음 2에는 이미 제대로 B가 대응이 되고 있으므로 3으로 넘어가자. 3에 A가 대응되도록 하고 싶은데 현재 A는 4에 대응되고 있으므로 3과 4의 사이에 가로선을 그려 주면 된다.



1에도 이미 제대로 D가 대응이 되고 있으므로, 이로써 원하는 그림을 얻었다. ♢

송이네가 그렸던 사다리보다는 매우 간단한 사다리가 되었군요. 위의 풀이는 1, 2, 3, 4의 순서로 맞춰주는 방식, 즉 가로선을 아래서부터 그리는 방식을 알고리즘으로 하고 있습니다. 순서를 3, 4, 1, 2로 바꾸거나 하면 다른 그림이 나올 수 있지만, 가로선을 아래로부터 그려가는 것에는 변함이 없지요. 여기서부터 우리는 다음과 같은 사실들을 이미 알아냈습니다.

사다리타기의 정리

사다리는 항상 일대일대응을 한다. 또 어떤 일대일대응을 원하더라도 거기에 맞는 사다리를 그릴 수 있다. 단, 그 사다리를 그리는 방법은 여러 가지가 있을 수 있다.

방법을 좀 바꾸어서, 대응이 출발점이 되는 A, B, C, D에 먼저 주목해 그 순서로 맞춰주는 것을 생각하면, 이번에는 가로선을 위에서부터 그려주면 됩니다.

예제 2

위의 문제와 같은 대응을, 이번에는 A, B, C, D의 순서로 맞추는 알고리즘으로 사다리를 그려라.

예제 3

이번에는 같은 대응을 인접교환만을 사용해서, 즉 바로 이웃한 세로선을 잇는 가로만을 사용해서 사다리를 그려보아라.

이 문제들까지 다 풀어보았다면 같은 대응을 갖는 사다리들을 여럿 가지게 되었을 것입니다. 이들을 들여다보면 뭔가 재미있는 사실이 발견되지 않나요? 몇 개의 가로를 사용했는지에 주목해 보세요. 모두 짝수라고요? 홀수 개의 가로를 사용해서 같은 대응을 갖는 사다리를 만들 수는 없을까요? 네, 그것은 불가능하답니다. 다음과 같은 유명한 사실이 있어요.

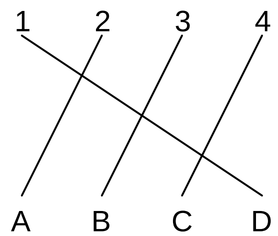
홀순열과 짝순열

같은 대응을 갖는 두 사다리에서 각각에 사용된 가로의 개수는 그 홀짝이 같다. 즉, 홀수 개의 가로만으로 만들 수 있는 대응이 있고, 또 짝수 개만으로 만들 수 있는 대응이 있다. 이런 일대일대응을 각각 **홀순열**과 **짝순열**이라고 한다.

이 정리는 도전문제로 남겨두겠습니다.

예제 4

다음의 대응은 홀순열인가 아니면 짝순열인가?



도전문제 5.2.1

예지의 생각은 다음과 같다: ‘거꾸로 가는 대응, 즉 역대응이 있으면, 그 대응은 일대일대응일 수밖에 없다.’ 이것을 증명하여라.

도전문제 5.2.2

사다리에 비스듬한 사선을 여러 개 그릴 때에도 사다리가 일대일대응임에는 변함 없을까? 이것을 확인해 보아라.

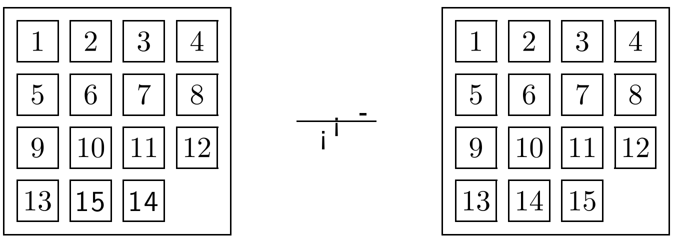
도전문제 5.2.3

홀순열과 짝순열의 정리를 증명하여라.

힌트 홀순열 혹은 짝순열이라 할 때의 ‘홀’과 ‘짝’은 각각 교환을 홀수 번 혹은 짝수 번 시행해야 원래의 위치로 돌아온다는 의미를 담고 있다. 즉, 교환이 이루어져야 하는 횟수가 매 교환을 시행할 때마다 홀짝이 바뀜을 보이면 해결할 수 있다.

도전문제 5.2.4

홀순열과 짝순열의 정리를 안다고 하자. 이를 이용해, 잘 알려진 15-퍼즐에서 두 숫자의 위치를 바꾸면 분해하지 않고서는 퍼즐을 맞출 수 없음을 보여라.



풀이 및 해답